Cvičení 2

Přípravy posílejte v jednom dokumentu ve formátu pdf do **7.3.2021 23:59** na email fstrakos@karlin.mff.cuni.cz Cvičení je doporučeno řešit v malých skupinkách, ale řešení pište každý sám a sepsaná řešení již nesdílejte. Úlohy, jejichž řešení považujete za kompletní a správné, prosím, viditelně označte.

Dokažte následující tvrzení:

1. Najděte pro nekonečné těleso příklad spočetného systému algebraických množin, jehož sjednocení není algebraická množina.
2. Ať $V \subseteq \mathbb{A}^n(K),\ W \subseteq A^m(K)$ jsou algebraické množiny, potom $V \times W \subseteq \mathbb{A}^{n+m}(K)$ je algebraická množina.
3. Pro algebraické množiny $V, W \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ platí $V = W \iff I(V) = I(W)$.
4. Nechť K je těleso. Ať $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ je vlastní algebraická množina.
   (a) Ať $P \in \mathbb{A}^n(K),\ P \notin V$. Potom $\exists f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ takový, že $f(Q) = 0\ \forall Q \in V$ a $f(P) = 1$.
   (b) Ať $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{A}^n(K)$ jsou různé body, $\forall i : P_i \notin V$. Potom $\exists f_1, \ldots, f_r \in I(V)$, že $f_i(P_j) = 0$ pokud $i \neq j$ a $f_i(P_j) = 1$ pokud $i = j$.
   (c) Ať $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{A}^n(K)$ jsou různé body, $\forall i : P_i \notin V$. Mějme $a_{ij} \in K\ \forall 1 \leq i, j \leq r$. Pak existují $g_1, \ldots, g_r \in I(V)$ takové, že $g_i(P_j) = a_{ij}$.
5. Ať $X \subseteq \mathbb{A}^n(K)$. Ukažte, že $I(X)$ je radikálový ideál.
6. Ať $I = (x^2 + 1) \subseteq \mathbb{R}[x]$. Ukažte, že I je radikálový ideál, ale neexistuje $X \in \mathbb{A}^1(\mathbb{R})$ že $I = I(X)$.
7. Ať $I \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$, pak $V(I) = V(\sqrt{I}))$ a $\sqrt{I} \subseteq I(V(I))$.
8. Existuje tvrzení obdobné úloze 4., které říká, že pokud je K algebraicky uzavřené těleso a V, W jsou disjunktní algebraické podmnožiny $\mathbb{A}^n(K)$, potom existuje polynom $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ takový, že $\forall Q \in V$ $f(Q) = 0$ a $\forall P \in W$ $f(P) = 1$.
   Hint: Důkaz tvrzení je přímým použitím Slabé Hilbertovy věty o nulách a Čínské zbytkové věty.
   Pokud K není algebraicky uzavřené, tak předchozí tvrzení neplatí. Pro $K = \mathbb{R}$ a pro následující podmnožiny $\mathbb{A}^2(K)$, $V = V(x-2)$ a body na kružnici $V(x^2 + y^2 - 1)$. Důkaz je obtížný.