Cvičení 5

Přípravy posílejte v jednom dokumentu ve formátu pdf do **28.3.2021 23:59** na email fstrakos@karlin.mff.cuni.cz Cvičení je doporučeno řešit v malých skupinkách, ale řešení pište každý sám a sepsaná řešení již nesdílejte. Úlohy, jejichž řešení považujete za kompletní a správné, prosím, viditelně označte. K řešení, prosím, přiložte svoji přezdívku.

1. Pro $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ a ideály $I \subseteq K[x, y]$ níže najděte $V(I)$ a spočítejte $dim_K(K[x, y]/I)$:
   (a) $I = (y^2 - x^3 + x, x)$,
   (b) $I = (x - 1, y)$,
   (c) $I = (x^3 + x^2 + x + 1)$,
   (d) $I = (x^3 - y^2, x^2 + 1)$,
   (e) $I = (y^2 - x^2, y^2 + x^2)$.
2. Nechť $K = \mathbb{C}$ a $V_\lambda = V(y^2 - x^2(x - \lambda))$ a mějme racionální funkce $h = \frac{[y]}{[x]}$ a $g = \frac{[x]}{[y]}$ na V_λ. Najděte póly následujících funkcí a určete funkční hodnoty tam, kde jsou funkce definovány:
   (a) h, h^2,
   (b) g, g^2.
3. Nechť K je jakékoli těleso. Nechť $V \subseteq A^n(K)$ je neprázdná varieta. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:
   (a) V je bod,
   (b) $\Gamma(V) \simeq K$ jako okruhy,
   (c) $dim_K \Gamma(V) = 1$, neboli $\Gamma(V) \simeq K$ jako vektorové prostory nad K.

   Hint: Implikace z (a) do (b) a z (b) do (c) jsou jednoduché. Z c) do b) uvažte na souřadnicovém okruhu okruhovou strukturu a rozmyslete si, že vyjde stejně jako ta indukovaná kanonickým homomorfismem vektorových prostorů dimenze 1. Na implikaci z b) do a) lze jít sporem přes ČZV, jednodušší řešení implikace z b) do a) je za zlatého bludišťáka a nehynoucí obdiv cvičícího!