Cvičení 6

Přípravy posílejte v jednom dokumentu ve formátu pdf do **5.4.2021 23:59** na email fstrakos@karlin.mff.cuni.cz Cvičení je doporučeno řešit v malých skupinkách, ale řešení pište každý sám a sepsaná řešení již nesdílejte. Úlohy, jejichž řešení považujete za kompletní a správné, prosím, viditelně označte. K řešení, prosím, přiložte svoji přezdívku.

1. Ať R je DVO s podílovým tělesem K a maximálním ideálem M.
   Hint: Pro důkaz (b) použijte (a). Pro důkaz a) se hodí charakterizace z úlohy 2 a 4.
   (a) Ukažte, že pokud $z \in K$ a $z \notin R$, pak $z^{-1} \in M$.
   (b) Ať $R \subseteq S \subseteq K$, S je DVO a maximální ideál S obsahuje M. Dokažte, že pak $S = R$.

2. Dokažte, že pro okruh R jsou následující tvrzení ekvivalentní:
   (a) R je DVO,
   (b) R je gaussovský a obsahuje nejvýše jeden ireducibilní prvek až na asociovanost
   (c) R je buď těleso, nebo obor integrity a existuje až na asociovanost jeden prvek $t \in R$, že $M = (t)$ a pro každé nenulové $r \in R$ existuje právě jedno $n \in \mathbb{N}_0$ a $u \in R$ asociované s $1 \in R$, že $r = ut^n$.

3. Nechť T je těleso a $T[[x]]$ značí formální mocninné řady nad T. Dokažte, že $T[[x]]$ je DVO.
   Hint: Použijte charakterizaci z předchozí úlohy. Absolutní člen je důležitý.

4. Nechť K je podílové těleso DVO R s maximálním ideálem $M = (t)$ pro t nenulové (tj. R není těleso), potom pro každé nenulové $q \in K$ existuje právě jedno $z \in \mathbb{Z}_0$ a $u \in R$ asociované s $1 \in R$, že $q = ut^z$.

5. Označme V Tschirnhausenovu kubickou křivku $V = V(x^2(x-9) + 27y^2) \subseteq A^2(\mathbb{R})$. Dokažte bez použití věty o regulárním bodu z přednášky, že $R = \mathcal{O}_{(0,0)}(V)$ není DVO.
   Hint: Najděte póly $q = \frac{[y]}{[x]} \in K(V)$ a q^2. Uvědomte si jak se při mocnění mění celé číslo z definováno v předchozím cvičení.

6. **S hvězdičkou:** Dokažte bez použití věty o regulárním bodu z přednášky, že lokalizace souřadnicového okruhu hyperboly je v každém bodě DVO.