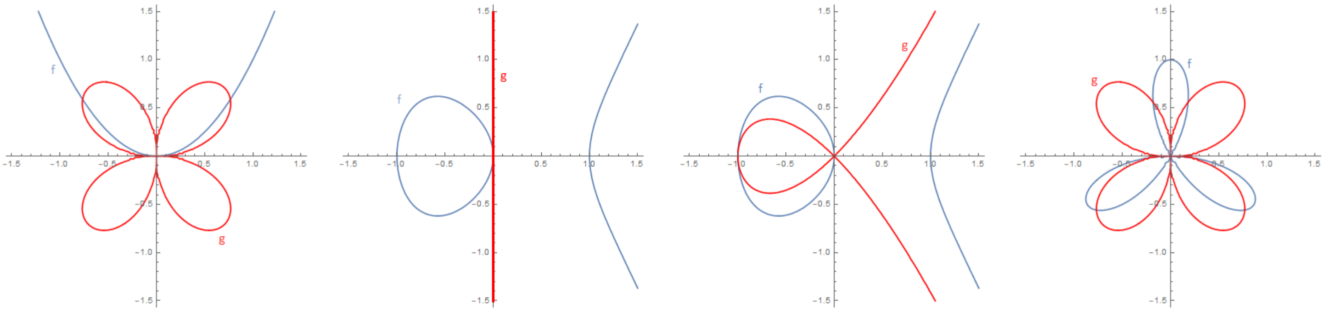
Cvičení 8

Přípravy posílejte v jednom dokumentu ve formátu pdf do **18.4.2021 23:59** na email fstrakos@karlin.mff.cuni.cz Cvičení je doporučeno řešit v malých skupinkách, ale řešení pište každý sám a sepsaná řešení již nesdílejte. Úlohy, jejichž řešení považujete za kompletní a správné, prosím, viditelně označte. K řešení, prosím, přiložte svoji přezdívku.

1. Spočtěte $I(P, f \cap g)$, $P = (0,0)$ pro
   (a) $f = y - x^2,\ g = (y^2 + x^2)^3 - 4x^2y^2,$
   (b) $f = y^2 - x^3 + x,\ g = x,$
   (c) $f = y^2 - x^3 + x,\ g = y^2 - x^3 - x^2.$
   (d) $f = (x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3$, $g = (x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2$
   (Pokud nevíte, jak začít, na další straně je řešený příklad :).
   A pokud se vám nedaří přijít na bod d), řešení najdete ve Fultonovi na straně 40.)



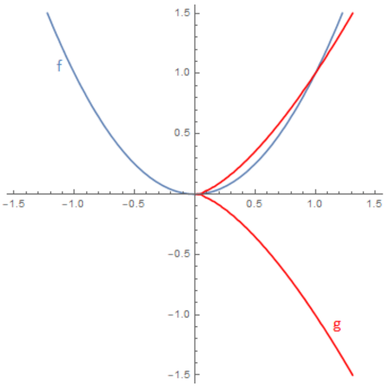
(a) (b) (c) (d)

2. Dokažte, že přímka l je tečnou k rovinné křivce f v bodě P právě tehdy, když $I(P, f \cap l) > m_P(f)$.

3. Ať P je jednoduchý bod na křivce f. Dokažte, že potom $I(P, f \cap (g + h)) \geq min(I(P, f \cap g), I(P, f \cap h))$. Najděte křivku f a její násobný bod, kde to neplatí.

4. Ať P je dvojný bod na rovinné křivce f a f má v P jednu (dvojnásobnou) tečnu l. Ukažte, že potom
   (a) $I(P, f \cap l) \geq 3,$
   (b) pokud $P = (0,0)$ a $l = y$, pak $I(P, f \cap l) = 3 \iff \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(P) \neq 0,$
   (c) pokud $I(P, f \cap l) = 3$, pak f má pouze jednu komponentu procházející bodem P.

Příklad. Spočtěte $I(P, f \cap g)$, kde $P = (0,0)$, $f = y - x^2$, $g = y^2 - x^3$.



Řešení. Upravíme výraz $I(P, f \cap g)$ pomocí vlastností (1) – (7) křížícího čísla (Fulton 3.3, strana 36-37).

$$\begin{aligned}
I(P, f \cap g) &\overset{(7)}{=} I(P, f \cap (g - yf)) = I(P, y - x^2 \cap -x^3 + x^2 y) = I(P, y - x^2 \cap x^2(x-y)) \\
&\overset{(6)}{=} I(P, f \cap x^2) + I(P, f \cap (x-y)) \overset{(6)}{=} 2 \cdot I(P, f \cap x) + I(P, f \cap (x-y)) \\
&\overset{(5)}{=} 2 \cdot m_P(f) \cdot m_p(x) + m_P(f) \cdot m_P(x-y) = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3.
\end{aligned}$$

V první rovnosti na posledním řádku výpočtu skutečně můžeme použít rovnost, neboť f nemá společnou tečnu ani s jednou z křivek x a $x - y$.