II. OKRUHY POLYNOMIÁLNÍCH ZOBRAZENÍ

(zatím v lib. dimenzi, nad lib. tělesem) → algebraické struktury pro algebraizaci geo. struktur

V <u>varieta</u> $\equiv$ ired. alg. množina

⇝ <u>okruh souřadnic</u> $\boxed{\Gamma(V) := K[\bar{x}]/I(V)}$ ... je to obor integrity protože $I(V)$ je prvoideál

<u>Alternativní pohled</u>:

$\mathcal{F}(V,K) := (\text{funkce } V \to K, \underbrace{+, \cdot}_{\text{po bodech}})$

$Pol(V) := \{\text{polynomiální fce } V \to K\} \leq \mathcal{F}(V,K)$

$\varphi_f : (a_1, \dots, a_n) \mapsto f(a_1, \dots, a_n)$ kde $f \in K[\bar{x}]$

<u>Pozor!</u> různé poly., stejné fce

Př.: $V = V(x)$ v $\mathbb{A}^2 \mathbb{R}$, všechny $f_a = ax + y$ ddávají stejnou poly. fci $V \to \mathbb{R}$

<u>Tvrzení</u>: $\boxed{Pol(V) \simeq \Gamma(V)}$

<u>Dk</u>:
$$K[\bar{x}] \to \mathcal{F}(V,K)$$
$$f \mapsto \varphi_f$$

... je to hom., $Im = Pol(V)$, $Ker = \{f : \varphi_f(0)\} = I(V)$

$\xRightarrow{\text{1. v. o izo.}} K[\bar{x}]/I(V) \simeq Pol(V)$ □

<u>Idea</u>: $\underbrace{f \equiv g \ (\mathrm{mod}\ I(V))}_{[f] = [g] \text{ v } \Gamma(V)} \iff \underbrace{\varphi_f = \varphi_g}_{f, g \text{ mají stejné hodnoty na } V}$

... tento dvojí pohled budeme používat implicitně

def: V, W variety, $V \subseteq \mathbb{A}^n$, $W \subseteq \mathbb{A}^m$

$\varphi : V \to W$ <u>polynomiální zobrazení</u> $\equiv$ poly. po složkách

tj. $\varphi_{f_1,\dots,f_m} : A \mapsto (f_1(A), \dots, f_m(A))$

kde $f_i \in K[x_1,\dots,x_n]$

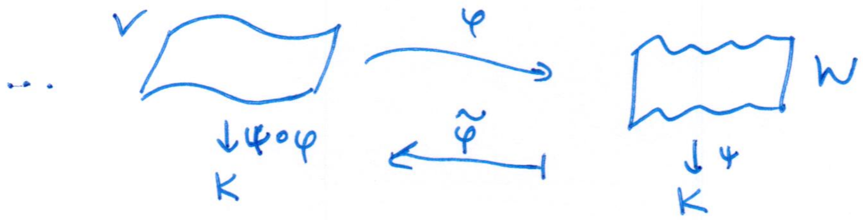
$\tilde{\varphi} : \mathcal{F}(W,K) \to \mathcal{F}(V,K)$

$\psi \mapsto \psi \circ \varphi$

... <u>substituční hom.</u>, pro $\varphi = \varphi_{f_1,\dots,f_m}$ to lze psát jako $\psi \mapsto \psi(f_1,\dots,f_m)$

$\tilde{\varphi}$ zobrazuje poly. fce na poly. fce

...



Tvrzení: $\{\text{poly. zobr. } V \to W\} \to \mathrm{Hom}(\Gamma(W), \Gamma(V))$ je bijekce

$\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$

Dk: 1) prosté: $\underset{\varphi_{f_1,\dots,f_m}}{\varphi} \neq \underset{\varphi_{g_1,\dots,g_m}}{\psi} \Rightarrow \exists i\ \exists A \in V\ f_i(A) \neq g_i(A)$

$\Rightarrow \tilde{\varphi}(x_i) = x_i \circ \varphi = f_i \neq g_i = x_i \circ \psi = \tilde{\psi}(x_i)$

2) na: dáno $\psi : \Gamma(W) \to \Gamma(V)$ hom.

$[x_i]_{I(W)} \mapsto [f_i]_{I(V)} \quad i = 1..m$

dokážeme, že $\psi = \tilde{\varphi}$, kde $\varphi = \varphi_{f_1,\dots,f_m}$:

... $\tilde{\varphi}([g]) = [g \circ \varphi] = [g(f_1,\dots,f_m)]$

... $[g] = [\sum a_{i_1\dots i_m} x_1^{i_1} \cdots x_m^{i_m}] \xmapsto{\psi} [\sum a_{i_1\dots i_m} f_1^{i_1} \cdots f_m^{i_m}] = [g(f_1,\dots,f_m)]$

□

def: $V \simeq W$ (izomorfní) $\equiv$ $\exists \varphi: V \to W$ poly. zobr. & bijektivní t.ž. φ^{-1} je taky poly. zobr.

Tvrzení: $V \simeq W \iff \Gamma(V) \simeq \Gamma(W)$

Dk: $(\Rightarrow)$

$\left.\begin{array}{l} \varphi: V \to W \rightsquigarrow \tilde{\varphi}: \Gamma(W) \to \Gamma(V) \\ \varphi^{-1}: W \to V \text{ poly.} \rightsquigarrow \widetilde{\varphi^{-1}}: \Gamma(V) \to \Gamma(W) \end{array}\right\}$ hom. ⇒ jsou to navzájem inverzní homomorfismy ⇒ izo.

$(\Leftarrow)$

$\left.\begin{array}{l} \psi: \Gamma(V) \simeq \Gamma(W) \text{ izo.} \\ \psi^{-1}: \Gamma(W) \simeq \Gamma(V) \text{ izo.} \end{array}\right\} \overset{\text{Tvrz.}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{l} \psi = \tilde{\varphi} \\ \psi^{-1} = \tilde{\varrho} \end{array}\right.$ pro nějaká poly zobr. φ, ϱ

⇒ musí být navzájem inverzní □

Př.: $A^1 \simeq$ libovolná přímka v A^n $= \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + LO\left\{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right\}$

$t \mapsto (c_1 + a_1 t, \dots, c_n + a_n t)$

$\frac{1}{a_i}(x_i - c_i) \leftarrow (x_1, \dots, x_n)$ kde i t.ž. $a_i \neq 0$ ... parametrizace přímky

Př.: $A^1 \simeq V(y - g(x)) \subseteq A^2$

$t \mapsto (t, g(t))$ ... parametrizace křivky $y = g(x)$

$x \leftarrow (x, y)$ (např. parabola ... $y - x^2$)

Cv.: přímka $\not\simeq$ kružnice $V(x^2+y^2-1)$, přímka $\not\simeq$ hyperbola $V(xy-1)$ ... přes strukturu $\Gamma(V)$

Př.: translace je izomorfismus: $f = f(x,y)$, $g = f(x+a, y+a)$

$\rightsquigarrow \quad V(f) \simeq V(g)$

$(x,y) \mapsto (x-a, y-a)$

$(x+a, y+a) \leftarrow (x,y)$

Důsledek: libovolnou křivku lze posunout tak, aby studovaný bod byl $(0,0)$

Př.: stejnolehlost je izo.: $f = f(x,y)$, $g = f(kx, ky)$ (⇒ všechny kružnice jsou izo.)

$\rightsquigarrow$! **Obecný př.:** bijektivní afinní transformace jsou izo.

(⇒ všechny elipsy jsou izo.)

def: <u>afinní změna souřadnic</u> $\equiv$ bijektivní afinní zobr.

$\equiv \underset{\text{poly. zobr.}}{\varphi : A^n \to A^n}$ t.ž. všechny f_i jsou lineární & bijekce

$\equiv \varphi : A^n \to A^n$

$\bar{u} \mapsto R\bar{u} + \bar{b}$ kde R je regulární matice, $\bar{b} \in A^n$

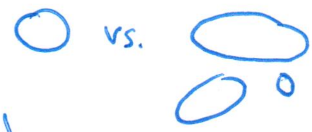
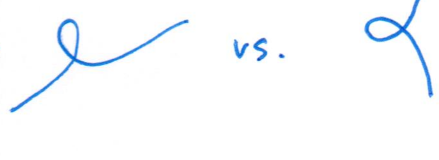
tj. $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\underbrace{\sum a_{1i} x_i + b_1}_{\text{poly. st. 1}}, \dots)$

φ^{-1} je taky af. změna souřadnic

... $\bar{v} \mapsto R^{-1}(\bar{v} - \bar{b}) = \underbrace{R^{-1}}_{\text{reg.}} \bar{v} - R^{-1}\bar{b}$

⇝ je to izomorfismus $V \simeq \varphi(V)$ pro lib. varietu V

<u>Použití:</u>

- křivky zadané co nejhezčí rovnicí
  - ... elipsy ⇝ $V(x^2 + y^2 - 1)$ 
  - ... eliptické křivky ⇝ $V(y^2 - x^3 - ax - b)$
- křivky ubíhají zvoleným směrem
  - ... el. křivky ↕ ... 
- studovaný bod BÚNO $(0,0)$
  - ... násobnost bodu
  - křížicí čísla
  - ⋮

(pro všechny vlastnosti dané strukturou $\Gamma(V)$ až na izomorfismus)