Věta: K alg. uz., I ideál v $K[\bar{x}]$ t.ž. $V(I)=\{A_1,\dots,A_N\}$ konečná

$$\Rightarrow \boxed{K[\bar{x}]/I \simeq \prod_{i=1}^{N} \mathcal{O}_{A_i}/I\cdot\mathcal{O}_{A_i}}$$

Důsledek: $\dim K[\bar{x}]/I = \sum_{i=1}^{N} \dim \mathcal{O}_{A_i}/I\cdot\mathcal{O}_{A_i} \geq |V(I)|$

protože to jsou všechno vlastní ideály čili netriv. faktory

Pozn.: tu nerovnost jsme měli v úvodní kapitole
tohle vysvětluje proč/o kolik je ta dimenze větší

Značení: $I\cdot J = (a\cdot b : a\in I, b\in J) = \{\sum a_i b_i : a_i\in I, b_i \in J\}$

Spec.: $I\cdot\mathcal{O}_{A} = (f\cdot q : f\in I, q\in\mathcal{O}_A) = \{\sum f_i q_i : f_i\in I, q_i\in\mathcal{O}_A\}$

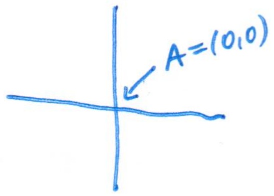
$! \neq \{f\cdot q : f\in I, q\in \mathcal{O}_A\}\ !$

- je to ideál v $\mathcal{O}_A$
- $I=(f_1,\dots,f_m) \Rightarrow I\mathcal{O}_A = \{\sum f_i q_i : q_i\in\mathcal{O}_A\}$

Použití:
- bude se hodit k důkazu násobnost $= \dim M_A^{n+1}/M_A^{n}$
- je na tom založena definice křížícího čísla:
  $$I(A, f\cap g) := \dim \mathcal{O}_A/(f,g)\mathcal{O}_A$$

→ tento kurz: aplikace na případ $I=(f,g)$, dimenze 2
$NSD(f,g)=1$

Př.: $I=(x,y)$ .... $V(I)=\{(0,0)\}$



oba faktory $\simeq K$

... $K[x,y]/I \simeq K$ ($f\mapsto f(0,0)$ & 1. v. o izo.)

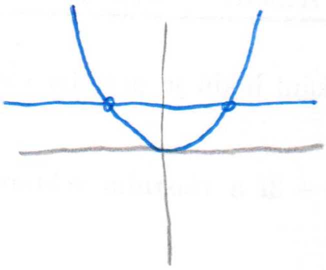
... $\mathcal{O}_{(0,0)} = \{\frac{f}{g} : g(0,0)\neq 0\}$

$I\mathcal{O}_{(0,0)} = \{x\cdot\frac{f}{g} + y\cdot\frac{h}{k} : g(0,0)\neq 0 \neq k(0,0)\}$

$= \{\frac{f}{g} : f(0,0)=0, g(0,0)\neq 0\} = M_{(0,0)}$ ... max. ideál v $\mathcal{O}_{(0,0)}$

Pr.: $I = (x^2 - y,\ y^3 - 1)$ ... $V(I) = \{(1,1), (-1,1), (\omega,\omega^2), (-\omega,\omega^2), (\omega^2,\omega^4), (-\omega^2,\omega^4)\}$

kde $\omega = e^{2\pi i/6}$



... $K[x,y]/_I$ ... báze $1, x, y, xy, y^2, xy^2$

... $I\mathcal{O}_A = \{(x^2-y)q_1 + (y^3-1)q_2 :\ q_1, q_2 \in \mathcal{O}_A\}$

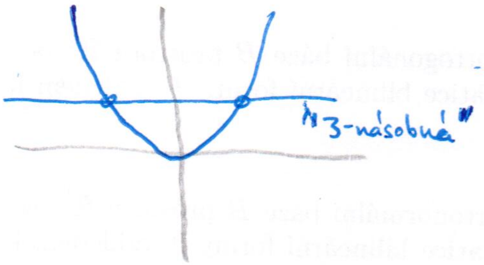
což je určitě $\subseteq M_A$, čili faktor netriv.

Věta říká, že $\underbrace{\dim K[x,y]/_I}_{6} = \sum_{A \in V(I)} \underbrace{\dim \mathcal{O}_A/_{I\mathcal{O}_A}}_{\geq 1}$

čili nutně $\dim \mathcal{O}_A/_{I\mathcal{O}_A} = 1 \quad \forall A \in V(I)$

čili nutně $I\mathcal{O}_A = M_A$ (max. ideál)

Pr.: $I = (x^2 - y,\ (y-1)^3)$ ... $V(I) = \{(1,1), (-1,1)\}$



... báze $K[\bar{x}]/_I$ je stejná, ale rozklad je určitě jiný ... jen 2 body,

čili $K[\bar{x}]/_I = \mathcal{O}_{(1,1)}/_{I\mathcal{O}_{(1,1)}} \times \mathcal{O}_{(-1,1)}/_{I\mathcal{O}_{(-1,1)}}$

Důkaz Věty:

1) vztah I vs. $I(\{A_i\})$
2) konstrukce jakýchsi polynomů $e_i \in K[\bar{x}]$
3) důkaz, že následující homomorfismus dá přes 1. v. o izo. hledaný izomorfismus

$$\varphi : K[\bar{x}] \longrightarrow \prod \mathcal{O}_{A_i}/_{I\mathcal{O}_{A_i}}$$

$$f \longmapsto \left([f]_{I\mathcal{O}_{A_1}}, \dots, [f]_{I\mathcal{O}_{A_N}} \right)$$

Část 1):

Lemma 1A: R noeth., $J \subseteq Rad(I) \Rightarrow \exists d\ J^d \subseteq I$

$$\boxed{\begin{array}{l} J^d \\ \shortparallel \\ ! \quad (a_1 \cdots a_d : a_i \in J) \\ \neq \\ (a^d : a \in J) \end{array}}$$

Dk: napiš $J = (u_1, \dots, u_n)$

zvol d_i t.ž. $u_i^{d_i} \in I$

$d := \sum_{i=1}^n d_i \quad \Longrightarrow$ pro $a_j = \sum r_{ji} u_i$ platí

$$a_1 \cdots a_d = \prod_{j=1}^d \left(\sum_{i=1}^n r_{ji} u_i \right) \text{ což dá}$$

po roznásobení součet $\sum \underset{\substack{\cap \\ R}}{\text{koef}} \cdot (\text{součin } d \text{ } u\text{-ček})$

(v každém sčítanci) $\overset{\text{nutně}}{\odot}$ aspoň jedno z těch u-ček musí být v mocnině $\geq d_i$

$\Longrightarrow$ tohle $u_i^{d_i} \in I$, čili každý sčítanec $\in I$ $\square$

Lemma 1B: $I + J = R \Rightarrow I \cap J = IJ$

Dk: $\supseteq$ jasné

$\subseteq$ $I \cap J = (I \cap J) R = (I \cap J)(I + J) = (I \cap J) I + (I \cap J) J$

$$\subseteq JI + IJ = IJ \qquad \square$$

Lemma 1C: $I_1, \dots, I_n$ komaximální $\Rightarrow \bigcap I_j = I_1 \cdots I_n$

$\qquad \forall i \quad I_i + \bigcap_{j \neq i} I_j = R$

Dk: indukcí z L.1B $\square$

Připomeň: $A = (a_1, \dots, a_n) \Rightarrow I(\{A\}) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$

Buď I ideál t.ž. $V(I) = \{A_1, \dots, A_N\}$

$\rightsquigarrow \boxed{I_j := I(\{A_j\})}$

$\overset{\text{nutně}}{\odot}$ $I \subseteq \bigcap_{j=1}^N I_j$ ... protože $A_j \in V(I)$

Lemma 1D: $\exists d$ t.ž. $\bigcap_{j=1}^N I_j^d \subseteq I$

Dk: $\bigcap I_j = \bigcap I(\{A_j\}) = I(\{A_1, \dots, A_N\}) = I(V(I))$ $\overset{\text{HVN}}{=}$ $\mathrm{Rad}(I)$

$\xRightarrow{L.1A}$ $(\bigcap I_j)^d \subseteq I$ pro nějaké d

$\xRightarrow{L.1C}$ $\bigcap I_j^d \subseteq I$ pro toto d

$\bigcap I_j^d \overset{1C}{=} I_1^d \cdots I_N^d = (I_1 \cdots I_N)^d \overset{1C}{=} (\bigcap I_j)^d \subseteq I$

protože $I_1, \dots, I_N$ jsou komaximální a jejich mocniny taky

□

Část 2)

zvol $f_i \in K[\bar{x}]$ t.ž. $f_i(A_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ ... viz starší Cv

$\boxed{e_i := 1 - (1 - f_i^d)^d}$ kde d je číslo z Lemmatu 1D $(i = 1, \dots, N)$

Vlastnosti:
- $e_i = f_i^d \cdot \text{něco} \in I_j^d \quad \forall j \neq i$

  $\Rightarrow e_i \in \bigcap_{j \neq i} I_j^d$ & $e_i e_k \in \bigcap_{j=1}^N I_j^d \overset{1D}{\subseteq} I$ $(k \neq i)$

- $1 - \sum e_i = \underbrace{1 - e_i}_{\in I_i^d} - \underbrace{\sum_{j \neq i} e_j}_{\in I_i^d} \in I_i^d \quad \forall i$

  $\Rightarrow 1 - \sum e_i \in \bigcap I_j^d \overset{1D}{\subseteq} I$

- $e_i - e_i^2 = e_i (1 - f_i^d)^d \in \left(\bigcap_{j \neq i} I_j^d\right) \cdot \left(I_i^d\right) \subseteq \bigcap I_i^d \overset{1D}{\subseteq} I$

  $[JK \subseteq J \cap K]$

Důsledek 2A: $\exists e_i \in \bigcap_{j \neq i} I_j^d$ t.ž. $e_i(A_i) = 1$ &

(1) $e_i^2 \equiv e_i \pmod I \quad \forall i$

(2) $\sum e_i \equiv 1 \pmod I$

(3) $e_i e_j \equiv 0 \pmod I \quad \forall i \neq j$

Lemma 2B: $\left.\begin{array}{l} g \in K[\bar{x}] \\ g(A_i) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists t \in K[\bar{x}]$ t.ž. $t \cdot g \equiv e_i \pmod{I}$

Dk: BÚNO $g(A_i) = 1$, $h := 1 - g \in I_i$

$$\dots \underbrace{(1-h)}_{g} \cdot \underbrace{(e_i + he_i + \dots + h^{d-1} e_i)}_{=: t} = e_i - \underbrace{h^d e_i}_{\in I_i^d \cdot \bigcap_{j \neq i} I_j^d = \bigcap_{j=1}^{N} I_j^d \subseteq I} \equiv e_i \pmod{I}$$

□

Část 3) Uvažuj φ ze strany $\boxed{19}$.

? Ker $\varphi = I$? $\supseteq$ jasné

$\subseteq$ nechť $\varphi(f) = 0$, tj. $f \in I \cdot \mathcal{O}_{A_i}$ $\forall i$

$\Rightarrow \forall i \, \exists g_i$ t.ž. $g_i(A_i) \neq 0$ & $g_i f \in I$

(protože můžeme napsat $f = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{h_j}_{\in I} \cdot \underbrace{\frac{u_j}{v_j}}_{\in \mathcal{O}_{A_i}} \in I \cdot \mathcal{O}_{A_i}$

a vzít třeba $g_i = v_1 \cdots v_m$)

$\leadsto$ pomocí Lemmatu 2B zvol t_i t.ž. $t_i \cdot g_i \equiv e_i \pmod{I}$

$$\Rightarrow f \underset{\text{Důsl. 2A(2)}}{\equiv} \sum_{i=1}^{N} e_i f \equiv \sum_{i=1}^{N} t_i \underbrace{g_i f}_{\in I} \equiv \sum t_i 0 = 0 \pmod{I}$$

$\Rightarrow f \in I$

□

? φ je na ? buď $\left(\left[\frac{r_1}{s_1}\right]_{I\mathcal{O}_{A_1}}, \dots, \left[\frac{r_N}{s_N}\right]_{I\mathcal{O}_{A_N}} \right) \in \prod \mathcal{O}_{A_j} / I\mathcal{O}_{A_j}$

čili $s_j(A_j) \neq 0 \xRightarrow{\text{L.2B}}$ vezmi $t_j \in K[\bar{x}]$ t.ž. $t_j s_j \equiv e_j \pmod{I}$

dokážeme, že $\varphi\left(\sum_{j=1}^{N} t_j r_j e_j\right) =$

tj. ? $\left[\sum t_j r_j e_j\right]_{I\mathcal{O}_{A_i}} = \left[\frac{r_i}{s_i}\right]_{I\mathcal{O}_{A_i}}$ $\forall i$?

$$\ldots \sum_{j=1}^{N} t_j r_j e_j = \underbrace{t_i}_{\equiv \frac{1}{s_i}} r_i \underbrace{e_i}_{\equiv 1} + \sum_{j \neq i} t_j r_j \underbrace{e_j}_{\equiv 0} \equiv \frac{r_i}{s_i} \pmod{I\mathcal{O}_{A_i}}$$

protože $e_i \equiv 1$ & $t_i s_i \equiv e_i$

plyne z toho, že $e_i^2 \equiv e_i \pmod{I\mathcal{O}_{A_i}}$
ale e_i je v $\mathcal{O}_{A_i}$ invertibilní,
takže $e_i \equiv 1 \pmod{I\mathcal{O}_{A_i}}$

Obojí je aplikace Důsledku 2A v kontextu okruhu $\mathcal{O}_{A_i}$

plyne z toho, že $e_i e_j \equiv 0 \pmod{I\mathcal{O}_{A_i}}$ $\forall j \neq i$
ale e_i je invertibilní
takže $e_j \equiv 0 \pmod{I\mathcal{O}_{A_i}}$

$\square$