Křížicí číslo (intersection number)

def.: f, g křivky v $\mathbb{A}^2$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{I_A(f \cap g) := \dim \mathcal{O}_A(\mathbb{A}^2) / (f,g)\mathcal{O}_A(\mathbb{A}^2)}$

Věta: (K alg. uz.)

(0) $A \notin \underbrace{V(f,g)}_{f \cap g} \iff I_A(f \cap g) = 0$

(1) f, g nemají společnou komponentu $\Rightarrow$

$$\sum_{A \in V(f,g)} I_A(f \cap g) = \dim K[x,y]/(f,g) < \infty$$

(2) f, g mají společnou komp., A v ní leží $\Rightarrow$

$$I_A(f \cap g) = \infty$$

(3) I je invariantní vůči afinní transformaci

tj. $T(A) = B \Rightarrow I_B(f \cap g) = I_A(f^T \cap g^T)$

(4) $I_A(f \cap g) = I_A(g \cap f)$

(5) $I_A(f \cap g) \geq m_A(f) \cdot m_A(g)$

$\boxed{I_A(f \cap g) = m_A(f) \cdot m_A(g)} \iff f, g$ nemají společnou tečnu v A

(spec.: A jednoduchý na f, g, $\underbrace{\text{různé tečny}}_{}$ $\Rightarrow I_A(f \cap g) = 1$)

(tj. křížení X napříč)

(6) $\boxed{I_A(f \cap gh) = I_A(f,g) + I_A(f,h)}$

(Důsledek: $f = \prod f_i^{r_i}$, $g = \prod g_j^{s_j}$ $\Rightarrow$ $\boxed{I_A(f \cap g) = \sum r_i s_j I_A(f_i \cap g_j)}$)

(7) $\boxed{I_A(f \cap g) = I_A(f \cap hf + g)}$ $\forall h$

Navíc, $I_A(f \cap g)$ je jediná možná definice splňující (0)–(7).

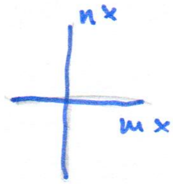
Výpočet křížícího čísla:

1) posuň si bod do počátku ... (3) ... abych mohl pracovat s m_A
2) rozlož na ireducibilní, pro každou počítej zvlášť ... (6)
3) upravuj pomocí (6), (4) dokud nelze použít rovnost (5)

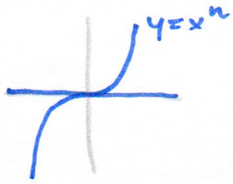
Příklady:

vše pro $A=(0,0)$

① $I(x^n \cap y^m) \overset{(6)}{=} m\cdot n\cdot I(x\cap y) \overset{(5)}{=} m\cdot n$

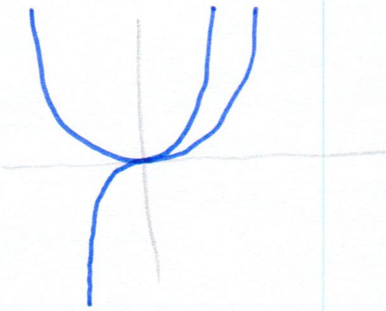


② $I(y-x^n \cap y) \overset{(7)}{=} I(x^n \cap y) \overset{①}{=} n$



③ $I(y-x^n \cap y-x^m) \overset{(7)}{=} I(y-x^m, \underbrace{x^n-x^m}_{x^m\cdot(x^{n-m}-1)})$

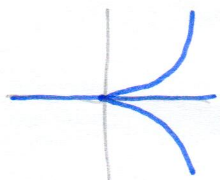
$n>m$



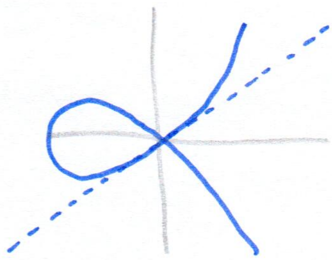
$$\overset{(6)}{=} \underbrace{I(y-x^m, x^m)}_{\overset{(6)}{=} m\cdot \underbrace{I(y-x^m, x)}_{=1 \text{ dle } (5)}} + \underbrace{I(y-x^m, x^{n-m}-1)}_{=0 \text{ dle } (0)}$$

$= m$

④ $I(y^2-x^3 \cap y) \overset{(7)}{=} I(x^3 \cap y) \overset{①}{=} 3$

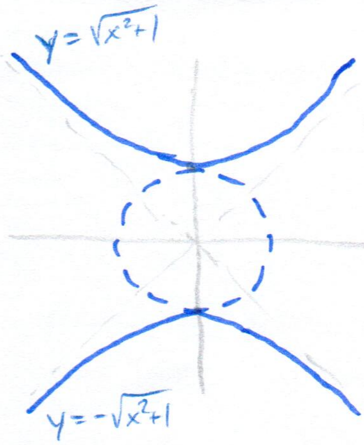


⑤ $I(y^2-x^3-x^2 \cap y-x)$



$$\overset{(7)}{=} I(\underbrace{y^2-x^3-x^2-y\cdot(y-x)}_{yx-x^3-x^2 \,=\, x\cdot(y-x^2-x)} \cap y-x)$$

$$\overset{(6)}{=} \underbrace{I(x \cap y-x)}_{=1 \text{ (napříč)}} + \underbrace{I(y-x^2-x \cap y-x)}_{\overset{(7)}{=} I(x^2 \cap y-x)=2} = 3$$

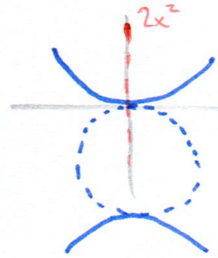


Př.: $I_{(0,1)}\left(y^2-x^2-1 \,\cap\, x^2+y^2-1\right)$

$\| \; (3) \ldots T(x,y) = (x, y+1)$

$I_{(0,0)}\left(\underbrace{(y+1)^2-x^2-1}_{y^2+2y-x^2} \,\cap\, \underbrace{x^2+(y+1)^2-1}_{y^2+2y+x^2}\right)$

$\overset{(7)}{=} I_{(0,0)}\left(\underbrace{2x^2 \cap y^2+2y+x^2}_{\text{2-nás. křížení napříč}}\right) = 2$



Důkaz: • jednoznačnost si rozmyslete sami … dáno algoritmus s jzn. výsledkem

(0) $A \notin V(f,g) \iff f(A) \neq 0$ nebo $g(A) \neq 0$

$\iff f$ nebo g je invertibilní v $\mathcal{O}_A(\mathbb{A}^2)$

$\iff (f,g) = \mathcal{O}_A(\mathbb{A}^2)$

($\Rightarrow$) zřejmé ($\Leftarrow$) $1 = uf + vg$ $\Rightarrow$ nemohou být oba $= 0$ v A

(1) $\Rightarrow \mathrm{NSD}(f,g) = 1 \xrightarrow{\text{Lemma kap. 1}} |f \cap g|$ je konečná

$\xrightarrow{\text{Věta z } \boxed{18}} K[x,y]/(f,g) \simeq \prod \mathcal{O}/(f,g)\mathcal{O}$

$\Rightarrow \dim$ –"– $= \sum \dim$ –"–

(2) Nechť $h|f$, $h|g$, $h \neq 1$

$\Rightarrow (f,g) \subseteq (h)$

$\Rightarrow \mathcal{O}/(f,g)\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}/h\mathcal{O}$ je dobře def. okr. hom. <u>na</u>

$[q] \longmapsto [q]$

$\Rightarrow I_A(f \cap g) = \dim \mathcal{O}/(f,g)\mathcal{O} \geq \dim \mathcal{O}/h\mathcal{O} \geq \dim K[x,y]/h \overset{\text{protože } V(h) \text{ nekon.}}{=} \infty$

(3) viz invariance lokálních okruhů vzhledem k T:

$$\sigma_B(\mathbb{A}^2) / (f,g)\sigma_B(\mathbb{A}^2) \simeq \sigma_A(\mathbb{A}^2) / (f^T, g^T)\sigma_A(\mathbb{A}^2)$$

$$[q] \mapsto [q^T]$$

(důkaz přes 1. v. o izo.: vezmi $q \mapsto [q^T]$, je dobře def., je na, spočti jádro)

(4) zřejmé

(7) $\overset{\text{m}}{\odot}$ $(f,g)\sigma_A = (h,k)\sigma_A \Rightarrow I_A(f \cap g) = I_A(h \cap k)$
$\forall f, g, h, k$

& aplikuj na situaci z (7) ... f, g vs. $f, hf+g$

(6) f, gh společnou komponentu $<$ mají ... $\Rightarrow \infty = \infty$; nemají:

Uvažuj $\psi : \sigma_A / (f,gh)\sigma_A \longrightarrow \sigma_A / (f,g)\sigma_A$ ... okruhový hom.

$$[q] \mapsto [q]$$

$\varphi : \sigma_A / (f,h)\sigma_A \longrightarrow \sigma_A / (f,gh)\sigma_A$ ... hom. vektor. prost.

$$[q] \mapsto [gq]$$

$\overset{\text{m}}{\odot}$ dobře def .... $[q] = [r] \mod (f,h)\sigma_A$
tj. $q - r \in (f,h)\sigma_A$
$\Rightarrow g \cdot (q-r) \in (f,gh)\sigma_A$
tj. $[gq] = [gr] \mod (f,gh)\sigma_A$

Dokážeme, že

$$0 \to \sigma_A / (f,h)\sigma_A \xrightarrow{\varphi} \sigma_A / (f,gh)\sigma_A \xrightarrow{\psi} \sigma_A / (f,g)\sigma_A \to 0$$

je krátká exaktní posloupnost.

Pak $\underbrace{\dim \mathcal{O}_A/(f,h)\mathcal{O}_A}_{I_A(f\cap h)} + \underbrace{\dim \mathcal{O}_A/(f,g)\mathcal{O}_A}_{I_A(f\cap g)} = \underbrace{\dim \mathcal{O}_A/(f,gh)\mathcal{O}_A}_{I_A(f\cap gh)}$.

vzhledem k $(f,h)\mathcal{O}_A$ — vzhledem k $(f,gh)\mathcal{O}_A$

- ? φ prosté ? $\quad \operatorname{Ker}\varphi = \{[q] : \underbrace{[gq]=[0]}_{gq\in(f,gh)\mathcal{O}_A}\}$

$= \{[q] : gq = uf + vgh \text{ pro nějaká } u,v\in\mathcal{O}_A\}$

přenásob společ. jmenovatelem s pro u,v $(s(A)\neq 0)$

$= \{[q] : \underbrace{sgq = lf + mgh}_{} \text{ pro nějaká } s,l,m\in K[x,y],\ s(A)\neq 0\}$

tj. $g(sq-mh) = lf$

$\Updownarrow$ $NSD(f,g)=1$

$f \mid sq - mh$

$\Updownarrow$

$df = sq - mh$ pro nějaké $d\in K[x,y]$

$\Updownarrow$

$q = \underbrace{\tfrac{d}{s}}_{\in\mathcal{O}_A}\cdot f + \underbrace{\tfrac{m}{s}}_{\in\mathcal{O}_A}\cdot h$ protože $s(A)\neq 0$

$\Updownarrow$

$q\in(f,h)\mathcal{O}_A$, tj. $[q]=[0]$

- ? φ na ? ... zřejmé

- $\operatorname{Ker}\varphi = \{[q] : q\in(f,g)\mathcal{O}_A\}$

$= \{[q] : q = uf + vg \text{ pro nějaká } u,v\in\mathcal{O}_A\}$

$= \{\underbrace{[uf]}_{[0]} + [vg] : u,v\in\mathcal{O}_A\}$

$= \{[vg] : v\in\mathcal{O}_A\} = \operatorname{Im}\varphi$

(5)

- $A \notin V(f,g) \Rightarrow$ platí dle (0)
- $A \in V(f,g)$, BÚNO $A = (0,0)$

  čili $f,g \in I := (x,y)$

  označ $m := m_A(f)$, $n := m_A(g)$

Dokážeme, že následující je exaktní diagram:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
K[x,y]/I^n \times K[x,y]/I^m \arrow[r, "\psi"] & K[x,y]/I^{m+n} \arrow[r, "\varphi"] & & K[x,y]/(I^{m+n}, f,g) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
 & \mathcal{O}_A/(f,g)\mathcal{O}_A \arrow[rr, "\pi"] & & \mathcal{O}_A/(I^{m+n}, f,g)\mathcal{O}_A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}
$$

kde
- φ, π jsou okruhové projekce $\left(R/_{\text{menší}} \to R/_{\text{větší}} \right)$
- α je okruhové vnoření $\left({}^{\text{menší}}/_{(x)} \to {}^{\text{větší}}/_{(x)} \right)$
- $\psi(([h],[k])) := [hf + kg]$ … lineární zobrazení (hom. vekt. pr.)

Pak: $I_A(f \cap g) = \dim \mathcal{O}_A/(f,g)\mathcal{O}_A$

$\geq \dim \mathcal{O}_A/(I^{m+n}, f,g)\mathcal{O}_A$ protože π je na

$= \dim K[x,y]/(I^{m+n}, f,g)$ protože α je izom.

$= \dim K[x,y]/I^{m+n} - \underbrace{\dim \operatorname{Ker} \varphi}_{\substack{\shortparallel \\ \dim \operatorname{Im}\psi \,\leq\, \dim \text{ toho dir. součinu vlevo}}}$ … dim Ker, Im pro zobr. φ

$$\geq \underbrace{\dim K[x,y]/I^{m+n}}_{\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}} - \Big(\underbrace{\dim K[x,y]/I^{n}}_{\frac{n(n+1)}{2}} + \underbrace{\dim K[x,y]/I^{m}}_{\frac{m(m+1)}{2}}\Big)$$

{viz ~~str.~~ $\boxed{31}$)

$$= \underline{\underline{m \cdot n}}$$

Navíc: rovnosti $\iff$ π je izomorfismus & ψ je ~~monomorfismus~~ prostý

Zbývá dokázat:

1. ψ je dobře def.
2. $\mathrm{Im}\,\psi = \mathrm{Ker}\,\varphi$
3. f, g nemají spol. tečnu v A $\Rightarrow$ ψ prostý
4. α je izomorfismus
5. f, g nemají spol. tečnu v A $\Rightarrow$ π prostý

… 4 díky Větě z $\boxed{18}$, protože $V(I^{n+m}, f, g) = \{(0,0)\}$

… 1 $([h],[k]) = ([0],[0]) \iff h \in I^n, k \in I^m \Rightarrow hf + kg \in I^{n+m}$
$\Rightarrow [hf+kg] = [0]$

… 2 $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{ [l] : l \in (I^{m+n}, f, g) \}$
$= \{ [i + hf + kg] : i \in I^{m+n}, h, k \in K[x,y] \} = \mathrm{Im}\,\psi$
protože $[i] = 0$

… 3 CHCI: $hf + kg \in I^{m+n} \Rightarrow h \in I^n$ & $k \in I^m$?

… celkem snadné cvičení na polynomy, s využitím
1) $u \in I^k \iff$ má pouze členy stupně $\geq k$
! 2) předpoklad: $NSD(f_n, g_m) = 1$ (různé tečny) !

skryté ve formách f_n, g_m

... ⑤ stačí dokázat, že $I^{m+n} \subseteq (f,g)\mathcal{O}_A$.

1) Nejdřív dokážeme, že $I^t \subseteq (f,g)\mathcal{O}_A$ pro dostatečně velké t:

... $V(f,g) = \{A, B_1, \dots, B_s\}$ protože f,g nemají společ. komponentu

... vezmi h t.ž. $h(B_i) = 0$, $h(\underbrace{(0,0)}_{A}) = 1$

$\Rightarrow$ $hx, hy \in I(V(f,g)) \overset{HVN}{=} \mathrm{Rad}((f,g))$

$\Rightarrow \exists N$ $(hx)^N, (hy)^N \in (f,g)$.... v $K[x,y]$

ale $h^N \nparallel 1$ v $\mathcal{O}_A$, protože $h(A) = 1$

$\Rightarrow$ $x^N, y^N \in (f,g)\mathcal{O}_A$ $\Rightarrow$ $I^{2N} \subseteq (f,g)\mathcal{O}_A$

2) Teď dokážeme, že lze vzít $t = m+n$:

... označ $l_1, \dots, l_m$ tečny f v A, tj. $f_m = \prod l_i$

$k_1, \dots, k_n$ tečny g v A $g_n = \prod k_i$

$a_{ij} := l_1 \cdots l_i \cdot k_1 \cdots k_j$

Cv $\{a_{ij} : i+j = t\}$ je báze v.pr. forem stupně t

(zde se využije předpoklad, že $l_i \neq k_j$ $\forall i,j$)

$\Rightarrow$ stačí dok., že $a_{ij} \in (f,g)\mathcal{O}_A$ $\forall i,j$ t.ž. $\underbrace{i+j = m+n}_{}$

čili $i \geq m$ NEBO $j \geq n$

pro $i \geq m$: $a_{ij} = a_{m0} \cdot b$ pro nějakou formu b st. $i+j-m = n$

$= \underbrace{l_1 \cdots l_m}_{f_m} \cdot b = b \cdot (f - \tilde{f}) \in (f,g)\mathcal{O}_A$

členy st. $> m$

□