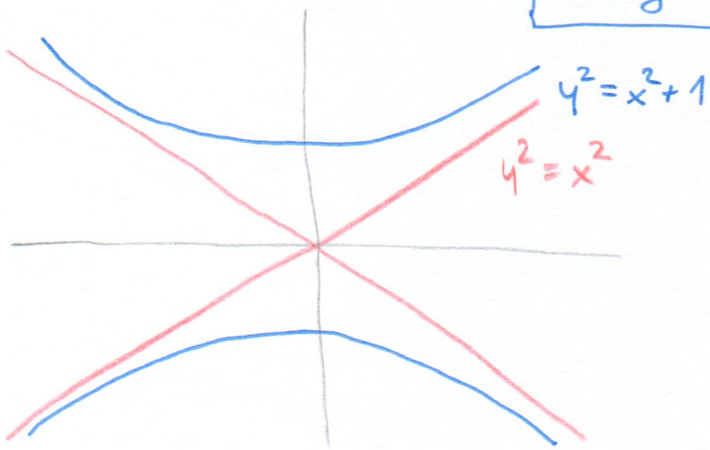
IV. ZÁKLADY PROJEKTIVNÍ ALG. GEOMETRIE

Připomenutí motivace:

Bézoutova věta neformálně: $|\underset{\text{st. } m}{f} \cap \underset{\text{st. } n}{g}| = m \cdot n$ { nad alg. uz. tělesem, včetně násobností, včetně bodů v nekonečnu

Bézoutova věta formálně: $$\boxed{\sum_{A \in f \cap g} I_A(f \cap g) = m \cdot n}$$ v $\underbrace{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})}_{\text{projektivní rovina}}$

Př.:



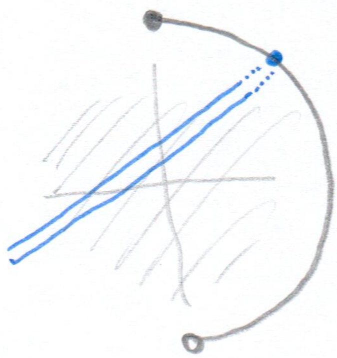
... kde jsou ty čtyři průsečíky?

... v $\mathbb{C}$ ne! ($\Rightarrow 0 = 1$)

... v nekonečnu ano

Idea: $\mathbb{P}^n(K) = \mathbb{A}^n(K) \cup \underbrace{\text{body v nekonečnu}}_{\text{směry přímek}}$

Př.: $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$:



... rovnoběžky ubíhají do stejného bodu

def: $\mathbb{P}^n(K) :=$ přímky v $\mathbb{A}^{n+1}(K)$ procházející 0

$$\overset{\text{ozn.}}{=} \quad K^{n+1} \setminus \{(0,\dots,0)\} / \sim \qquad \text{kde } u \sim v \iff u = \lambda v \text{ pro něj. } \lambda$$

zápis: $[a_1 : a_2 : \dots : a_{n+1}]$ ... homogenní souřadnice (jzn. až na násobek)

Formální defce vs. neformální idea:

zvol $k \in \{1,\dots,n+1\}$ (typicky $k=n+1$)

$\rightsquigarrow$ všechny homog. souř. jsou tvaru $[a_1 : \dots : a_{k-1} : {}^{0}_{1} : a_{k+1} : \dots : a_{n+1}]$

$\rightsquigarrow$ 0... body v nekonečnu
1... afinní body

čili: $$\mathbb{P}^n(K) = \underbrace{\mathbb{A}^n(K)}_{\substack{\text{body kde}\\ a_k=1}} \,\dot\cup\, \underbrace{\mathbb{P}^{n-1}(K)}_{\substack{\text{body kde}\\ a_k=0}}$$

(zde už λ-násobek nehraje roli) (zde je vše až na λ-násobek)

def: afinní body v $\mathbb{P}^n(K)$ body v nekonečnu v $\mathbb{P}^n(K)$

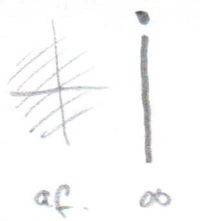
Speciálně: $\mathbb{P}^0$ = bod $\quad (\dots \ |K\setminus\{0\}/\sim| = 1 \ )$

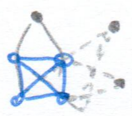
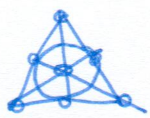
$\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \mathbb{P}^0$ = afinní přímka + bod

$\mathbb{P}^2 = \mathbb{A}^2 \cup \mathbb{P}^1$ = af. rovina + proj. přímka

$\quad\vdots \qquad\qquad \vdots$

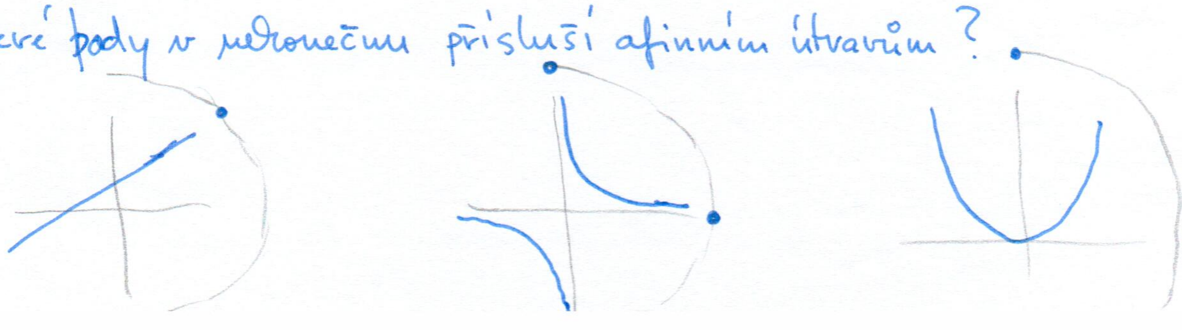
$[a:b:1] \qquad [a:b:0]$



Cvičení: $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}_2)$ =  = 

namalujte si $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}_3)$, $\mathbb{P}_3(\mathbb{F}_2)$ (moc to nejde)

? které body v nekonečnu přísluší afinním útvarům?



def.: <u>homogenizace</u> polynomu : ... formalizace přechodu $\mathbb{A}^n \rightsquigarrow \mathbb{P}^n$

$$f \in K[x_1, \dots, x_n] \rightsquigarrow \boxed{f^* = \sum f_i \cdot x_{n+1}^{d-i}} \in K[x_1, \dots, x_{n+1}]$$

$\| $

$f_0 + \dots + f_d$ (rozklad na formy st. 0..d)

$\circledcirc$ f^* je forma st. d

$\|$

homogenní poly. ≡ všechny členy stejný stupeň

$\circledcirc$ $f^* = x_{n+1}^d \cdot f\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$

<u>Př.</u>: $f = ax+by+c$ afinní přímka $\rightsquigarrow$ $f^* = ax+by+cz$ proj. přímka

$f = 1 - xy + y^2 + 2x^2y \rightsquigarrow f^* = z^3 - xyz + y^2z + 2x^2y$

<u>def</u>: <u>dehomogenizace</u> v k-té složce :

$f \in K[x_1, \dots, x_{n+1}]$ forma $\rightsquigarrow$ $f_{*k} = f(x_1, \dots, \underset{\uparrow \text{ k-tá}}{1}, \dots, x_n) \in K[x_1, \dots, x_n]$

... zpravidla $k = n+1$, pak se značí jen f_*

$\circledcirc$ $(f^*)_* = f$ ALE POZOR! obecně $(f_*)^* \neq f$

<u>Př.</u>: $f = xyz - z^3 \rightsquigarrow (f_*)^* = xy - z^2$

$\circledcirc$ $(f_*)^* = \frac{1}{x_{n+1}^{\ell}} \cdot f$ kde ℓ max. t.ž. $x_{n+1}^{\ell} \mid f$

$\circledcirc$ (cv.) $(fg)^* = f^* g^*$, $(fg)_* = f_* g_*$

$\circledcirc$ (cv.) $(f+g)_* = f_* + g_*$ ALE POZOR! $(f+g)^* \neq f^* + g^*$

→ platí $x_{n+1}^m (f+g)^* = x_{n+1}^k f^* + x_{n+1}^{\ell} g^*$

pro $k = \deg g$, $\ell = \deg f$,

$m = k + \ell - \deg(f+g)$

Uvažuj $f \in K[x_1, \dots, x_{n+1}]$, $A \in \mathbb{P}^n$:

! POZOR : hodnota $f(A)$ není dobře definovaná ! (ani pro formy)

$\dots \; A = [a_1 : \dots : a_{n+1}] = [\lambda a_1 : \dots : \lambda a_{n+1}] \quad \forall \lambda \neq 0$

ALE: pravdivostní hodnota "$f(A) = 0$" je dobře def.

def.: A je (projektivní) nula pro f $\equiv$ $f(a_1, \dots, a_{n+1}) = 0$ $\forall\, a_1, \dots, a_{n+1}$ t.ž. $A = [a_1 : \dots : a_{n+1}]$

pro formy lze i $\exists$, obecně ne

Př.: $f = x^2 y - yz$, $A = [1:1:1]$ $\dots$ $f(1,1,1) = 0$
$= [\lambda : \lambda : \lambda]\ \forall \lambda$ $\quad f(2,2,2) \neq 0$! $\leadsto$ není nula

$A = [1:0:1]$ $\dots$ $f(\lambda, 0, \lambda) = 0 \quad \forall \lambda$
$= [\lambda : 0 : \lambda]\ \forall \lambda$ $\leadsto$ je nula

Idea projektivní alg. geo. :

afinní alg. mna $\underbrace{V(f_1, \dots, f_n)}_{\text{společné nuly pro poly. } f_1, \dots, f_n}$ $\leadsto$ projektivní alg. mna $\underbrace{V(f_1^*, \dots, f_n^*)}_{\text{společné nuly pro formy } f_1^*, \dots, f_n^* \text{ v uvedeném smyslu}}$

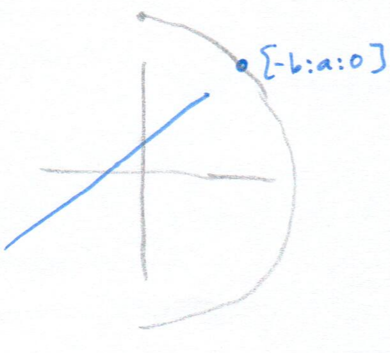
Př.: $f = ax + by + c$ af. přímka $\leadsto$ $f^* = ax + by + cz$ proj. přímka

$\mathbb{P}^2 \ni A = [x:y:z]$ je nula pro f^* $\iff$ $ax + by + cz = 0$

$\iff$ $z = 1$ $\dots$ $[x, y]$ je afinní bod na f
 $z = 0$ $\dots$ $ax + by = 0$

$\leadsto$ jediné řešení $\underbrace{[-b : a : 0]}$!

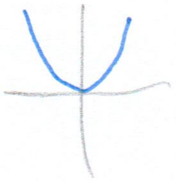
$\cong$ směrový vektor té přímky

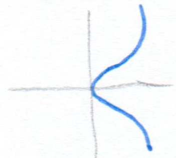


⊙ afinní body na f^* jsou totožné s body f

... protože $(f^*)_* = f$

Př.: $f = y - x^2$, $\underbrace{f = y^2 - (x^3 + \dots)}_{\text{eliptická křivka}}$ ⇝ $f^* = y^k z - (x^{k+1} + \dots)$





⇝ ~~projektivní~~ body v nekon. je ~~jsou~~ jediný: $A = [0:1:0]$

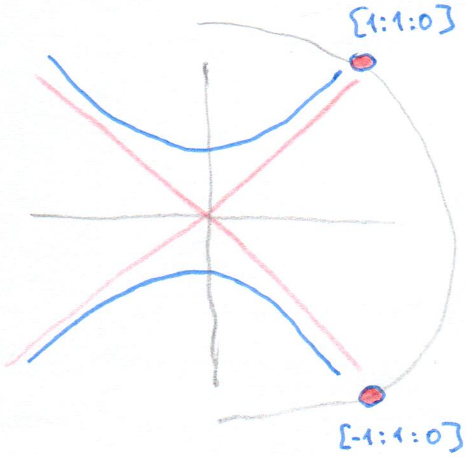
Př.: $f = y^2 - (x^2 + 1)$ ⇝ $f^* = y^2 - x^2 - z^2$

$z = 0$ ... $y = \pm x$

čili $[1 : \pm 1 : 0]$

$f = y^2 - x^2$ ⇝ $f^* = y^2 - x^2$

$z = 0$ ... to samé!



Poznámka: každé dvě přímky (různé) v $\mathbb{P}^2$ se protnou v právě jednom bodě

Geo. důkaz:
- různoběžky (af. X)
- rovnoběžky (v nek.)

! afinní přímka ∩ přímka v nek. ⟶ přímka $z = 0$

Algebraický důkaz: soustava

$$ax + by + cz = 0$$
$$a'x + b'y + c'z = 0$$

... různé ⇒ hodnost 2 ⇒ má řešení $\neq 0$

⇝ **PONAUČENÍ:** algebraizace umožňuje důkazy bez rozboru případů

(af. body / body v nek. TO SAMÉ)

Tvrzení: (K nekon.)

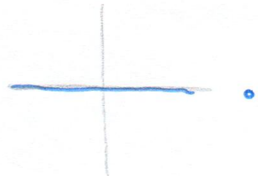
$$f = f_0 + \dots + f_d \implies \left[\begin{array}{c} A \text{ je nula pro } f \\ \Updownarrow \\ A \text{ je nula pro } f_i \quad \forall i = 0..d \end{array}\right.$$

Př.: $f = x^2 y - yz$ ... pozor, $[1:1:1]$ není nula!
$f(2,2,2) \neq 0$

↳ dle Tvrzení: $yz = 0$ ... $y = 0$ nebo $z = 0$
$x^2 y = 0$ ... $x = 0$ nebo $y = 0$

⇝ řešení $[a:0:b]$, $[0:a:0]$

tj. $\underbrace{[b:0:1], \ [0:1:0]}_{\text{vodorovná přímka}}$



Pozn.: ve Fultonovi je to cvičení*

Důkaz: $\Uparrow$ triviální

$\Downarrow$ Označ $A = [a_1 : \dots : a_{n+1}]$, $u_i := f_i(a_1, \dots, a_{n+1}) \stackrel{?}{=} 0$

A je nula pro f, čili $\forall \lambda$ $\quad 0 = f(\lambda a_1, \dots, \lambda a_{n+1})$

$$= \sum_{i=0}^{d} \underbrace{f_i(\lambda a_1, \dots, \lambda a_{n+1})}_{\lambda^i \cdot \underbrace{f_i(a_1, \dots, a_{n+1})}_{u_i}}$$

$$\forall \lambda \quad \sum_{i=0}^{d} u_i \lambda^i = 0 \quad \Longleftarrow$$

ale nenulový polynom jedné prom. má kon. mnoho kořenů

$\implies$ je to nulový poly., čili $\forall i \ u_i = 0$ $\square$

Pozn.: na co nuly polynomů, které nejsou formy?

... abych mohl dělat algebru, potřebuju vše uzav. na $+, \cdot$

⇝ i z forem budou vznikat nehomog. poly.

BUDE: Proj. alg. mny $\underset{\text{Galois}}{\rightleftarrows}$ homogenní ideály
↳ generované formami