<u>Tvrzení</u>: I ideál v $K[x_1,\dots,x_n]$ $\Rightarrow$ NTJE:

(1) $f \in I \Rightarrow \forall i \; f_i \in I$ (i-tá forma pro f)

(2) I je generovaný formami (dokonce konečně mnoha)

$\rightsquigarrow$ <u>def.</u>: takový ideál se nazývá <u>homogenní</u>

<u>Dk</u>: (1) $\Rightarrow$ (2) $\quad I = (f, g, h, \dots) \Rightarrow I = (f_0, f_1, \dots, g_0, g_1, \dots)$

(HVB: stačí kon. mnoho)

(2) $\Rightarrow$ (1) $\quad$ nechť $I = (g^{(j)} : j \in J)$, označ $d_j = \deg g^{(j)}$

buď $f = \sum_{j \in J'} h^{(j)} g^{(j)} \in I$ $\quad$ ($J' \subseteq J$ kon.)

$$\Rightarrow \; f_i = \sum_{j \in J'} \underbrace{h^{(j)}_{i-d_j}}_{\text{forma st. } i-d_j} \; \underbrace{g^{(j)}}_{\text{forma st } d_j} \in I$$

$\square$

<u>Projektivní verze Galoisovy korespondence</u> <u>body $\leftrightarrow$ polynomy</u>:

$$\mathbb{P}^n(K) \underset{V_p}{\overset{I_p}{\rightleftarrows}} K[x_1,\dots,x_{n+1}]$$

$S \subseteq K[\bar{x}] \rightsquigarrow V_p(S) := \{A \in \mathbb{P}^n : A \text{ je nula pro každé } f \in S\}$

$X \subseteq \mathbb{P}^n \rightsquigarrow I_p(X) := \{f \in K[\bar{x}] : \forall A \in X \; A \text{ je nula pro } f\}$

<u>def.</u>: mny tvaru $V_p(S)$ se nazývají <u>projektivní alg. množiny</u>

$I_p(X)$ je homogenní ideál

... viz Tvrzení že A je nula pro $f \Leftrightarrow f_i(A) = 0 \; \forall i$

$\rightsquigarrow$ lze generovat formami

$\ddot{\odot}$ $I(S) \Rightarrow V_P(I) = V_P(S) = V_P(\{f_i : f \in S, i = 0..\deg f\})$

$\Rightarrow$ HVB: každá proj. alg. mna je dána konečně mnoha formami

Pozor! $\underbrace{V_A, I_A}$ $\neq$ $\underbrace{V_P, I_P}$

NULA $\equiv$ $f(\bar{a}) = 0$ | $f_i(\bar{a}) = 0 \ \forall i$

tj. $f(\lambda\bar{a}) = 0 \ \forall\lambda$

označení A pro afinní verze pokud není zřejmé z kontextu

Př.: $V_A(y - x^2)$ je parabola v $\mathbb{A}^2$

$V_P(y - x^2)$ je ~~bod [0:0]~~ v $\mathbb{P}^1$

$\emptyset$

Základní vlastnosti I_P, V_P:

Galois. koresp.

- $X \subseteq Y \Rightarrow I_P(X) \supseteq I_P(Y)$, $S \subseteq T \Rightarrow V_P(S) \supseteq V_P(T)$
- $X \subseteq V_P(I_P(X))$, $S \subseteq I_P(V_P(S))$
- $V_P I_P V_P = V_P$, $I_P V_P I_P = I_P$
- $I_P(X)$ je radikál
- extrémní případy: $V_P(0) = \mathbb{P}^n$, $V_P(1) = \emptyset$

  $I_P(\emptyset) = K[\bar{x}]$, $I_P(\mathbb{P}^n) = 0$
- jednobodovky: $\{[a_1 : \dots : a_n : 1]\} = V_P(x_1 - a_1 x_{n+1}, \dots, x_n - a_n x_{n+1})$

  $\{[a_1 : \dots : a_{n-1} : 1 : 0]\} = V_P(\dots, x_{n-1} - a_{n-1} x_n, x_{n+1})$

  $\vdots$

  $\{[1 : 0 : \dots : 0]\} = V_P(x_2, \dots, x_{n+1})$

  pozor, jinak než pro afinní!

- $\bigcap V_P(S_j) = V_P(\bigcup S_j)$, $V_P(I) \cup V_P(J) = V_P(IJ)$

Důkaz: vesměs snadné cvičení / $\ddot{\odot}$

radikál: lépe se ověřuje přes $f(\lambda\bar{a})$ než přes $f_i(\bar{a})$ $\square$

Tvrzení: Buď $X \subseteq \mathbb{P}^n$ alg. množina. Pak

$$\underbrace{X \text{ je ireducibilní}}_{\text{rozumí se v projektivním smyslu}} \iff I_P(X) \text{ je } \underbrace{\text{prvoideál}}_{\text{(rozumí se ve standardním smyslu)}}$$

tj. $X = Y \cup Z$, Y, Z proj. alg. mny $\Rightarrow X = Y$ nebo $X = Z$

Dk: $\Rightarrow$ Důkaz pro afinní:

$$fg \in I(X),\ f, g \notin I(X) \implies X = \underbrace{(X \cap V(f))}_{\neq X} \cup \underbrace{(X \cap V(g))}_{\neq X}$$

Pozor! myšlenka je jako pro afinní, detaily jiné

Proč to nefunguje projektivně:

$$\forall \lambda\ fg(\lambda \bar{a}) = 0 \implies \forall \lambda\ [f(\lambda \bar{a}) = 0 \text{ NEBO } g(\lambda \bar{a}) = 0]$$

ALE: já potřebuju $[\forall \lambda\ f(\lambda \bar{a}) = 0]$ NEBO $[\forall \lambda\ g(\lambda \bar{a}) = 0]$

rozumí se $\lambda \neq 0$ (všude)

Řešení: 1) ☺ platí to, pokud f, g jsou formy

... pak $[\exists \lambda\ f(\lambda \bar{a}) = 0 \Rightarrow \forall \lambda\ f(\lambda \bar{a}) = 0]$

2) Lemma: I homogenní ideál $\Rightarrow$

I je prvoideál $\iff \forall f, g$ formy $fg \in I \Rightarrow f \in I$ nebo $g \in I$

Dk: Buď f, g poly. t.ž. $fg \in I$

$$\dots\ fg = \left(\sum_i f_i\right)\left(\sum_j g_j\right) = \sum_k \underbrace{\left(\sum_{k=i+j} f_i g_j\right)}_{k\text{-tá forma součinu}} \in I$$

$$\overset{I \text{ homog.}}{\implies} \forall k \sum_{k=i+j} f_i g_j \in I$$

buď i nejmenší t.ž. $f_i \notin I$ $k := i + j$

j $g_j \notin I$

$$\implies \underbrace{f_0 g_k + \dots +}_{\in I} \underbrace{f_i g_j}_{\notin I} + \underbrace{\dots + f_k g_0}_{\in I} \in I \quad \lightning$$

$(\Leftarrow)$ $X = Y \cup Z$, $Y, Z \neq X$ $\Rightarrow$ $I_P(X) \subsetneq I_P(Y)$, $\subsetneq I_P(Z)$

$\Longrightarrow$ $\exists$ formy $f \in I_P(Y) \setminus I_P(X)$

$g \in I_P(Z) \setminus I_P(X)$

I_P jsou gen. formami, musí se lišit v generátorech

ale $f \cdot g \in I_P(X)$ ↯ □

(pro tuto úvahu vlastně není podstatné, že to jsou formy) (nuluje se $\forall$ bod v Y i Z $\Rightarrow$ i v X)

Pozn.: Věta o jednoznačném rozkladu na ireduc. komponenty projde doslova stejně jako v afinním případě.

def: $\underbrace{X \subseteq \mathbb{P}^n \text{ alg. mna}}_{\text{projektivní objekt}} \rightsquigarrow \underbrace{\text{kužel}}_{\text{afinní objekt}}$ $C(X) \in \mathbb{A}^{n+1}$

$$C(X) := \{(a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{A}^{n+1} : [a_1 : \dots : a_{n+1}] \in X\} \cup \{(0, \dots, 0)\}$$

! Tvrzení: (1) $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{P}^n \Rightarrow I_A(C(X)) = I_P(X) \quad \subseteq K[\bar{x}]$

(2) I homogenní, $V_P(I) \neq \emptyset \Rightarrow C(V_P(I)) = V_A(I) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$

Důkaz: … v zásadě CVIČENÍ, rozepiš definice a uvidíš

(1) $I_A(C(X)) = \{f : f(\bar{a}) = 0 \ \ \forall$ volbu homog. souř. pro $A \in X$ & $f(0, \dots, 0) = 0\}$

$I_P(X) = \{f :$ ——— " ——— $\}$

ⓞ ta podmínka $f(0, \dots, 0) = 0$ je splněna automaticky pokud $X \neq \emptyset$

(2) $I = (S)$ kde S obsahuje formy

& použij pozorování že pro formy $f(\bar{a}) = 0 \Rightarrow f(\lambda \bar{a}) = 0 \ \forall \lambda$

ten bod $(0, \dots, 0)$ tam bude kdykoliv $V_P(I) \neq \emptyset$

□

Projektivní Nullstellensatz : I homogenní $\Rightarrow$
(K alg. uz.)

(SLABÁ) $V_p(I) = \emptyset \Leftrightarrow \exists N$ t.ž. I obsahuje všechny formy stupně $\geq N$

(SILNÁ) $V_p(I) \neq \emptyset \Rightarrow I_p(V_p(I)) = \mathrm{Rad}(I)$

Pozn.: Jak to bylo pro afinní? (SLA.) $V_A(I) = \emptyset \Leftrightarrow I = K[\bar{x}]$
(SIL.) $I_A(V_A(I)) = \mathrm{Rad}(I)$ bez předpokladu

Př.: Proč tak složitě?

... $V_p(1) = \emptyset$, $(1) = K[\bar{x}]$ je radikál

... $V_p(x_1, \dots, x_{n+1}) = \emptyset$, $I = (x_1, \dots, x_{n+1})$ je radikál

$\left(V_A(x_1, \dots, x_{n+1}) = \{(0, \dots, 0)\} \neq \emptyset\right)$ ALE: $I_p(V_p(I)) = K[\bar{x}] \neq I = \mathrm{Rad}(I)$!

... $V_p(x_i x_j : i, j = 1 .. n+1) = \emptyset$, ale $I = (x_i x_j, \dots)$ není radikál

Důkaz: (SLABÁ) $V_p(I) = \emptyset \overset{\text{homog.}}{\Leftrightarrow} V_A(I) \subseteq \{(0, \dots, 0)\}$

$\Leftrightarrow I_A(V_A(I)) \supseteq (x_1, \dots, x_{n+1})$
$\quad \| \text{ HVN af.}$
$\mathrm{Rad}(I)$

$\Leftrightarrow \exists d \quad x_1^d, \dots, x_{n+1}^d \in I$

$\Leftrightarrow$ I obsahuje všechny formy dostatečně velkého stupně
Cv / 👁

(SILNÁ) $I_p(V_p(I)) \overset{(1)}{=} I_A(C(V_p(I)))$

použij kužel

$\overset{(2)}{=} I_A(V_A(I)) \xlongequal{\text{HVN af.}} \mathrm{Rad}(I)$

□