Komentář k videu o reprezentacích grup

`https://www.youtube.com/watch?v=qpGDNKgfHHg`

Tento text je komentářem ke zmíněnému videu pro studenty předmětu Proseminář z algebry.

Cíl: Seznámit se s konceptem maticové reprezentace grup. Jde o klasickou a velmi užitečnou disciplínu, s aplikacemi od teorie čísel (viz video Kena Ribeta) až po matematickou fyziku. Cílem je, abyste tušili, o co jde. Pokud chcete vědět více, ve vyšší ročnících je řada kurzů, která se týká různých aspektů teorie reprezentací.

Instrukce: Nejdřív si pusťte video. Úvodní poznámky do času 1:20 můžete ignorovat, autor měl na mysli jinou motivaci než já, ale zbytek videa se hodí pro naše účely dobře. Pak si přečtěte text uvedený níže, který je výňatkem z nově připravovaných skript. V něm je pečlivě sepsána standardní reprezentace symetrické grupy S_n, která je popsaná na konci videa. Z ní plyne, že každá konečná grupa má věrnou maticovou reprezentaci.

Ještě jednou uvedu základní myšlenku maticové reprezentace grupy $\mathbf{G}$: každé mu prvku $g \in G$ je přiřazena matice A_g (věrná reprezentace znamená, že různým prvkům přísluší různé matice), a to tak, že prvky $\mathbf{G}$ se násobí stejně jako příslušné matice, tj. matice příslušná součinu gh je matice $A_g A_h$. Jinými slovy, zobrazení $g \mapsto A_g$ je (prostý) homomorfismus. (Analogicky pro permutační reprezentace neboli působení na množině atd.)

Prostým homomorfismům se říká krátce *vnoření*. Je-li $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ vnoření, pak je obraz $\mathrm{Im}(\varphi)$ je podgrupou H, která je izomorfní s grupou G.

Nyní popíšeme věrnou reprezentaci grupy $\mathbf{S}_n$ v $\mathbf{GL}_n(\mathbf{T})$, tj. najdeme vnoření $\mathbf{S}_n \to \mathbf{GL}_n(\mathbf{T})$, kde $\mathbf{T}$ je libovolné těleso. Uvažujme

$$\psi : \mathbf{S}_n \to \mathbf{GL}_n(\mathbf{T}), \quad \sigma \mapsto \big(\delta_{i,\sigma(j)}\big)_{i,j=1}^n,$$

kde $\delta_{u,v} = 1$ pokud $u = v$ a $\delta_{u,v} = 0$ v opačném případě. Tedy $\psi(\sigma)$ je matice, ve které je v každém řádku a každém sloupci právě jedna jednička a jinak samé nuly, přičemž ta jednička na i-tém řádku je v $\sigma^{-1}(i)$-tém sloupci. Evidentně jde o prosté zobrazení, zbývá tedy dokázat, že to je homomorfismus, tedy že platí

$$\psi(\pi \circ \sigma) = \psi(\pi) \cdot \psi(\sigma)$$

pro všechny permutace $\pi, \sigma \in S_n$. Pravá strana je rovna

$$\big(\delta_{i,\pi(j)}\big)_1^n \cdot \big(\delta_{i,\sigma(j)}\big)_1^n = \Big(\sum_k \delta_{i,\pi(k)} \cdot \delta_{k,\sigma(j)}\Big)_1^n.$$

Přitom $\delta_{i,\pi(k)} \cdot \delta_{k,\sigma(j)} = 1$ právě tehdy, když $i = \pi(k)$ a $k = \sigma(j)$, což je právě tehdy, když $i = \pi(\sigma(j))$ a $k = \sigma(j)$. Tedy celá suma je rovna jedné pro $i = \pi(\sigma(j))$ a nule v opačném případě. Tím pádem je to přesně matice $\psi(\pi \circ \sigma)$.

Příklad. Rozebereme si reprezentaci grupy $\mathbf{S}_3$ v grupě $\mathbf{GL}_3(\mathbf{T})$:

$$\psi(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \psi((1\ 2\ 3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi((1\ 3\ 2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\psi((1\ 2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \psi((2\ 3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi((1\ 3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Věta 0.1 (lineární reprezentace)**.** *Každou konečnou grupu lze vnořit do nějaké obecné lineární grupy, nad libovolným tělesem.*

Důkaz. Buď $\mathbf{T}$ libovolné těleso, $\mathbf{G}$ daná konečná grupa a označme $n = |G|$. Buď φ bijekce $G \to H = \{1, \dots, n\}$. Nejprve vytvoříme kopii grupy $\mathbf{G}$ na množině H, tj. vytvoříme grupu $\mathbf{H}$ tak, že φ je izomorfismus $\mathbf{G} \simeq \mathbf{H}$. Dále vezmeme Cayleyovu reprezentaci $\lambda : \mathbf{H} \to \mathbf{S}_n$. Nakonec použijeme výše popsané vnoření $\psi : \mathbf{S}_n \to \mathbf{GL}_n(\mathbf{T})$, hledaným vnořením $\mathbf{G}$ do $\mathbf{GL}_n(\mathbf{T})$ bude složení $\psi \circ \lambda \circ \varphi$. $\square$

Pro připomenutí z přednášky: *Cayleyova reprezentace* je vnoření

$$\lambda : \mathbf{G} \to \mathbf{S}_G, \quad a \mapsto L_a,$$

kde $L_a : G \to G$, $x \mapsto a \cdot x$ jsou tzv. *levé translace* v grupě $\mathbf{G}$.