Kombinatorický přístup k teorii uzlů a využití algebry k důkazům nerozuzlovatelnosti

`https://www.youtube.com/watch?v=yr7jVEHfBdc`

Tento text je komentářem k uvedenému videu, který jej uvádí do kontextu předmětu Proseminář z algebry. Doporučuji nejdříve shlédnout video a přečíst komentář o copáncích, pak teprve studovat uzly.

Video pochází z mé vlastní přednášky na výroční matematické konferenci Pakistánské matematické společnosti v Islamabádu v roce 2019. Jde o stručný úvod do teorie uzlů, s důrazem na její výpočetní aspekty. Základní problém zní: mám nakreslený uzel, je možné jej rozuzlovat?

Neformálně, uzel je provázek, který v nějaké (více či méně) zašmodrchané podobě uložíme v prostoru a slepíme konce. Formálně, jde o uzavřenou spojitou křivku bez křížení v $\mathbb{R}^3$ splňující jisté technické předpoklady, které vylučují jisté patologické příklady (do nekonečna se zmenšující smyčky apod.). Podobně jako v případě copánků, základem úspěchu pro výpočetní problémy je, zbavit se analytického formalismu. K tomu slouží Reidemeistrova věta vysvětlená na přednášce, která říká, že jeden uzel lze přemotat na druhý (formálně: ty dvě křivky jsou tzv. ambientně izotopické, definici vám řeknu na přednášce o algebraické topologii) právě tehdy, když se od jedné k druhé dostanu konečnou posloupností jistých elementárních pohybů. Z problému ekvivalence uzlů se tak stává kombinatorická úloha o jistých lokálních manipulacích v jistém typu grafů.

Přednáška vysvětluje výpočetní trable s tímto popisem, obtížnost nalezení těchto elementárních pohybů, pokud uzel rozuzlovat jde, potenciálně velká délka těchto posloupností atd. Ještě zajímavější však je úloha, jak prokázat, že daný uzel rozuzlovat *nejde*. A zde přichází do hry algebra, částečně vítězně. V druhé části videa se vysvětlují tzv. barvicí invarianty, které si berou za parametr jakousi podivnou algebraickou strukturu zvanou *quandle* (český termín neexistuje). První i druhé části přednášky byste měli rozumět.

Na konci pak v rychlosti zmiňuji, jak lze jisté užitečné typy quandlů konstruovat pomocí tranzitivních grup a tam už se možná ztratíte (permutační grupa se nazývá tranzitivní, pokud má pouze jednu orbitu). Stručně řečeno, výsledkem mého výzkumu s Alexanderem Hulpkem a Petrem Vojtěchovským je způsob, jak přetvářet tranzitivní grupy v barvicí invarianty, přičemž teoreticky lze naším postupem zkonstruovat barvicí invarianty všechny (prakticky narážíme na limity teorie tranzitivních grup).