__def__: Polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ je __symetrický__ pokud

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}) \qquad \forall \pi \text{ permutaci na } \{1, \dots, n\}$$

__def__: __ELEMENTÁRNÍ SYMETRICKÉ POLYNOMY__:

$$s_1 = x_1 + \dots + x_n = \sum_i x_i$$

$$s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = \sum_{i<j} x_i x_j$$

$$\vdots$$

$$\boxed{s_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} x_{i_1} \cdots x_{i_k}}$$

$$\vdots$$

$$s_n = x_1 \cdots x_n$$

__Tvrzení__ (__Viètovy vztahy__): Buď T těleso, $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in T[x]$ stupně ≥ 1.

Uvažujme rozklad $f = a_n(x-u_1)\cdots(x-u_n)$ v $S[x]$.
$(S \supseteq T)$

Pak $$\boxed{\frac{a_{n-i}}{a_n} = (-1)^i \cdot s_i(u_1, \dots, u_n)}$$

Základní věta o symetrických polynomech:

Buď R obor, $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ symetrický.

Pak $\exists!\ g \in R[z_1, \dots, z_n]$ takový, že $f = g(\underbrace{s_1, \dots, s_n}_{\text{(elementární sym. poly.)}})$.

Důsledek: Buď T těleso, $f \in T[x]$ stupně ≥ 1.

Uvažujme rozklad $f \,\|\, (x-u_1)\cdots(x-u_n)$ v $S[x]$ $\quad (S \geq T)$.

Pak pro každý symetrický $s \in T[x_1, \dots, x_n]$ platí $\boxed{s(u_1, \dots, u_n) \in T}$.

<u>def</u>: <u>LEXIKOGRAFICKÉ USPOŘÁDÁNÍ NA TERMECH</u> :

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} < x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_n^{l_n} \iff \exists i \geq 0 \text{ t.ž. } k_1 = l_1, \dots, k_i = l_i \ \& \ k_{i+1} < l_{i+1}$$

<u>Vedoucí člen</u> polynomu $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ je ten lexikograficky největší.

<u>Lemma</u>: (1) $\leq$ je lineární uspořádání

(2) $t_1 < t_2,\ s_1 < s_2 \Rightarrow t_1 s_1 < t_2 s_2$

(3) neexistuje nekonečná posloupnost $t_1 > t_2 > t_3 > \dots$

<u>Lemma</u>: (1) $\ell(f \cdot g) = \ell(f) \cdot \ell(g)$ (pokud R je obor nebo f, g monické)

(2) f symetrický, $\ell(f) = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} \Rightarrow k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$

<u>Lemma</u>: $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n \geq 0 \Rightarrow \exists!$ n-tice $l_1, \dots, l_n \geq 0$ taková, že

$$x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} = \ell(s_1^{l_1} \cdots s_n^{l_n})$$

<u>GAUSSŮV ALGORITMUS</u>:

<u>IN</u>: $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ symetrický

<u>OUT</u>: $g \in R[z_1, \dots, z_n]$ t.ž. $f = g(s_1, \dots, s_n)$

$f_1 = f,\ g_1 = 0$
pro $i = 2, 3, \dots$:
najdi $l_1, \dots, l_n$ t.ž. $\ell(f_i) = c \cdot \ell(s_1^{l_1} \cdots s_n^{l_n})$
$f_{i+1} := f_i - c \cdot s_1^{l_1} \cdots s_n^{l_n}$, $g_{i+1} := g_i + c \cdot z_1^{l_1} \cdots z_n^{l_n}$
pokud $f_{i+1} \in R$, odpověz $g_{i+1} + f_{i+1}$

Základní věta algebry: $f \in \mathbb{C}[x]$ stupně ≥ 1 $\Rightarrow$ f má v $\mathbb{C}$ kořen

Snadný důsledek: $f \in \mathbb{C}[x]$ stupně $n \geq 1$ $\Rightarrow$ $f \parallel (x-u_1) \cdots (x-u_n)$ v $\mathbb{C}[x]$

Lemma 1: Má-li každý $f \in \mathbb{R}[x]$ st. ≥ 1 kořen v $\mathbb{C}$,
pak má každý $f \in \mathbb{C}[x]$ st. ≥ 1 kořen v $\mathbb{C}$.

Lemma 2: $f \in \mathbb{C}[x]$ stupně 2 $\Rightarrow$ f má v $\mathbb{C}$ kořen

Lemma 3: $f \in \mathbb{R}[x]$ lichého stupně $\Rightarrow$ f má kořen v $\mathbb{R}$