Důsledky teorie o působení grupy na množině.

<u>def</u>: $G \leq S_n$ se nazývá <u>tranzitivní</u>, má-li jen $\boxed{1}$ orbitu

<u>Jordanova věta</u>: $\left.\begin{array}{l} G \leq S_n \text{ tranzitivní} \\ |G| > 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \pi \in G$ bez pevného bodu

<u>Cauchyova věta</u>: Buď G konečná grupa, p <u>prvočíslo</u>, $p \mid |G|$.
Pak v G existuje prvek řádu p.

[<u>Připomenutí</u>: $|G| = |G_x| \cdot |[x]|$, čili velikost orbity dělí $|G|$.]

__Tvrzení__: $H \leq G \Rightarrow$ NTJE: (1) $aH = Ha \quad \forall a \in G$

(2) $aha^{-1} \in H \quad \forall h \in H, a \in G$

__def__: Takové podgrupy se nazývají __NORMÁLNÍ__, značíme $H \trianglelefteq G$.

Ⓞ $\varphi: G \to H$ homomorfismus $\Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi \trianglelefteq G$

KONSTRUKCE __FAKTORGRUPY__ G/N, kde $N \trianglelefteq G$:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{def. } a \sim b \iff ab^{-1} \in N \overset{\text{Tvrzení}}{\iff} aN = bN \\ \text{Ⓞ je to ekvivalence, bloky } [a] = aN = Na \\ \text{def. operace na blocích: } [a] \cdot [b] := [a \cdot b] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\; [a]^{-1} := [a^{-1}] \\ \rightsquigarrow G/N := (\{[a] : a \in G\}, \cdot, ^{-1}, [1]) \end{array}}$$

__Tvrzení__: Operace jsou dobře definovány a G/N je skutečně grupa.

Věta o homomorfismu: Buď $\varphi: G \to H$ homom. grup.

(1) Je-li $N \trianglelefteq \mathrm{Ker}(\varphi)$, pak $\psi: G/N \to H$, $[a] \mapsto \varphi(a)$ je dobře definovaný homomorfismus.

(2) $\boxed{G/\mathrm{Ker}(\varphi) \simeq \mathrm{Im}(\varphi)}$ (1. věta o izomorfismu)

2. věta o izomorfismu: Buď $N \trianglelefteq G$.

(1) $N \trianglelefteq H \trianglelefteq G \Rightarrow H/N \trianglelefteq G/N$

(2) $K \trianglelefteq G/N \Rightarrow \exists H \trianglelefteq G$ t.ž. $K = H/N$

(3) $N \trianglelefteq H \trianglelefteq G \Rightarrow \boxed{\dfrac{G/N}{H/N} \simeq G/H}$

3. věta o izomorfismu: Buď $N \trianglelefteq G$, $H \leq G$.

Pak $HN \leq G$, $H \cap N \trianglelefteq H$, $\boxed{HN/N \simeq H/H \cap N}$

__def__: Grupa G se nazývá __ŘEŠITELNÁ__ pokud $\exists k \; \exists N_0, \dots, N_k \trianglelefteq G$ t.ž.

$\{1\} = N_0 \leq N_1 \leq \dots \leq N_k = G$ & $\forall i$ $\boxed{N_i / N_{i-1} \text{ je abelovská}}$

Nejmenší takové k se nazývá __stupeň řešitelnosti__.

__Tvrzení__: Buď G grupa.

(1) G řešitelná, $H \leq G$ $\Rightarrow$ H řešitelná

(2) G řešitelná, $N \trianglelefteq G$ $\Rightarrow$ G/N řešitelná

(3) $N \trianglelefteq G$, N řešitelná, G/N řešitelná $\Rightarrow$ G řešitelná

↳ __Důsledek__: $\{1\} = N_0 \leq N_1 \leq \dots \leq N_k = G$, $\forall i$ N_i / N_{i-1} řešitelná $\Rightarrow$ G řešitelná