

Domácí úkol č. 1 k přednášce NMAG112: Lineární algebra 2

letní semestr 2022/2023

Datum odevzdání **pátek, 24.2.2023, 10:40**

(1.1) Dokažte, že v libovolném komplexním vektorovém prostoru V se skalárním součinem $\langle, \rangle$ platí (pro libovolné $u, v \in V$)

$$\operatorname{Re}(\langle u, v \rangle) = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2) ,$$

$$\operatorname{Im}(\langle u, v \rangle) = \frac{1}{4}(\|u - iv\|^2 - \|u + iv\|^2) ,$$

kde $\operatorname{Re}(x)$ značí reálnou a $\operatorname{Im}(x)$ imaginární část komplexního čísla x . (Pro inspiraci viz Tvrzení 8.32.)

(1.2) Zobrazení $\langle, \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je dáno vzorcem

$$\langle u, v \rangle = u^T A v$$

kde A je reálná symetrická čtvercová matice $A = (a_{ij})$ řádu 2. Dokažte, že $\langle, \rangle$ je skalární součin na $\mathbb{R}^2$ právě tehdy, když platí

$$a_{11} > 0 \quad \text{a} \quad \det(A) > 0 .$$

(Pro inspiraci viz Příklad 8.18.)

Bonusový problém: Buď $A = (a_{ij})$ reálná symetrická matice řádu n . Pro $1 \leq k \leq n$ označme $A_k = (a_{ij})_{i,j \leq k}$ matici řádu k , která vznikne z matice A vynecháním posledních $n - k$ řádků a posledních $n - k$ sloupců. Ukažte, že matice A určuje skalární součin na $\mathbb{R}^n$ právě když $\det(A_k) > 0$ pro všechna $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.