Domácí úkol č. 6 k přednášce NMAG112: Lineární algebra 2
letní semestr 2022/2023
Datum odevzdání **pátek, 31.3.2023, 10:40**

(6.1) Rozhodněte, která z následujících tvrzení platí pro každou reálnou čtvercovou matici A řádu k (odpověď dokažte).

(a) Pokud $A^2 = A$ a λ je vlastní číslo matice A, pak $\lambda \in \{0, 1\}$.

(b) Pokud $A^2 = A$, pak 0 je vlastním číslem matice A.

(c) Pokud pro nějaké přirozené číslo n platí $A^n = 0_{k\times k}$ a λ je vlastní číslo matice A, pak $\lambda = 0$.

(d) Pokud pro nějaké přirozené číslo n platí $A^n = 0_{k\times k}$, pak 0 je vlastní číslo matice A.

(6.2) Lineární operátor f na prostoru $\mathbf{V} = LO\{(1,3,-1,1)^T, (0,1,-1,4)^T\} \leq \mathbb{R}^4$ splňuje

$$f((1,3,-1,1)^T) = (1,6,-4,13)^T, \quad f((0,1,-1,4)^T) = (1,2,0,-3)^T$$

Spočítejte $f^n((7,17,-3,-9)^T)$.

Nápověda: Začněte tím, že najdete matici f vzhledem k nějaké bázi prostoru $\mathbf{V}$ tak, aby byla co nejjednodušší a dobře se mocnila.

Bonusový problém: Nechť f, g jsou diagonalizovatelné operátory na konečně generovaném prostoru $\mathbf{V}$. Dokažte, že $fg = gf$ právě tehdy, když existuje báze B prostoru $\mathbf{V}$ taková, že každý vektor z B je zároveň vlastním vektorem operátoru f i g.