Buď R, S okruhy. (s jednotkou, $0 \neq 1$)

HOMOMORFISMEM rozumíme zobrazení $\varphi: R \to S$ splňující $\forall a,b \in R$

$$\boxed{\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \quad \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)}, \quad \varphi(-a) = -\varphi(a), \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1$$

<u>def</u>: <u>jádro</u> φ : $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{a \in R : \varphi(a) = 0\}$ — je to <u>IDEÁL</u> v R

$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(a) : a \in R\}$ — je to podokruh v S

φ je prosté $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$

<u>Tvrzení</u>: $\varphi: R \to S$, $\psi: S \to T$ hom. okruhů $\Rightarrow$ $\psi \circ \varphi$ je také hom.

$\varphi: R \to S$ $\underbrace{\text{bijektivní hom.}}_{\text{IZOMORFISMUS}}$ $\Rightarrow$ φ^{-1} je také hom.

Konstrukce FAKTOROKRUHU :

Uvažuj ideál I v okruhu R.

Definujeme relaci na R: $a \sim b \overset{\text{def}}{\iff} a-b \in I$

😳 je to ekvivalence, $a \sim b \iff a+I = b+I$, bloky jsou $[a] = a+I$

Definujeme operace na blocích: $[a]+[b] := [a+b]$, $[a]\cdot[b] := [a\cdot b]$, $-[a] := [-a]$

$\rightsquigarrow$ $R/_I = (\{[a] : a \in R\}, +, -, \cdot, [0], [1])$ se nazývá faktorokruh R podle I

😳 operace jsou dobře definované

😳 výsledná struktura je okruh

😳 $R \to R/_I$, $a \mapsto [a]$ je homomorfismus

Věta o homomorfismu: Buď $\varphi : R \to S$ hom. okruhů.

(1) Je-li I ideál v R t.ž. $I \subseteq \operatorname{Ker}(\varphi)$, tak $\varphi : R/_I \to S$, $[a] \mapsto \varphi(a)$ je dobře definovaný hom.

(2) $\boxed{R/_{\operatorname{Ker}\varphi} \simeq \operatorname{Im}\varphi}$ 1. věta o izomorfismu

Created by Notein

1. věta o izomorfismu: Buď $\varphi: R \to S$ hom. okruhů. Pak $\boxed{R/\ker\varphi \simeq \operatorname{Im}\varphi}$

$[a] \mapsto \varphi(a)$

2. věta o izomorfismu: Buď I ideál v R.

(1) ideály okruhu R/I jsou právě ideály J/I t.ž. $I \subseteq J \subseteq R$

(2) $\forall I \subseteq J \subseteq R$ ideál $\boxed{\left(R/I\right) / \left(J/I\right) \simeq R/J}$

3. věta o izomorfismu: Buď I ideál a S podokruh v R. Pak

$$\boxed{S+I/I \simeq S/S \cap I}$$

Buď R komutativní okruh a I jeho ideál.

def: I nazveme PRVOIDEÁL pokud $I \neq R$ & $\forall a,b \in R \quad a \cdot b \in I \implies a \in I$ nebo $b \in I$

MAXIMÁLNÍ pokud $I \neq R$ & neexistuje ideál J t.ž. $I \subsetneq J \subsetneq R$

($m \neq 0$, $m \nmid 1$)

mR je prvoideál $\iff$ m je prvočinitel v R

je-li R obor hlavních ideálů, pak mR je maximální $\iff$ m je ireducibilní

($|R|>1$)

R je obor $\iff$ $\{0\}$ je prvoideál

(STARÉ TVRZENÍ) R je těleso $\iff$ $\{0\}$ je maximální ideál

Tvrzení: Buď R komutativní okruh, $|R|>1$, a I jeho ideál. Pak

(1) $R/_I$ je obor $\iff$ I je prvoideál

(2) $R/_I$ je těleso $\iff$ I je maximální