Cvičení 2.

1. Rozhodněte, které z následujících zobrazení jsou homomorfismy (monomorfismy, epimorfismy):

$$\alpha :(\mathbb{C},+,\cdot) \to (M_2(\mathbb{R}),+,\cdot), \qquad a+bi \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$
$$\beta :(\mathbb{Z},+,\cdot) \to (\{0,\dots,n-1\},+_{\bmod n},\cdot_{\bmod n}), \qquad x \mapsto x \bmod n$$
$$\gamma :(\{0,\dots,n-1\},+_{\bmod n},\cdot_{\bmod n} \to (\mathbb{Z},+,\cdot), \qquad x \mapsto x$$

2. Najděte všechny homomorfismy a)$(\mathbb{Z},+) \to (\mathbb{N},+)$, b) $(\mathbb{Z},+) \to (\mathbb{N}\cup\{0\},+)$, c) $(\mathbb{Z},+,\cdot) \to (\mathbb{Z},+,\cdot)$.

3. Dokažte, že vlastnost $|\{a \in A|\ a \circ a = a\}| = n$ je invariantem pro každou algebru $(A,\circ)$ s binární operací $\circ$ a pro každé přirozené n.

4. Dokažte, že $(\mathbb{R}^2,\cdot) \not\simeq (\mathbb{R}^3,\cdot)$, zatímco $(\mathbb{R}^2,+) \simeq (\mathbb{R}^3,+)$.

5. Dokažte, že $(\mathbb{Z},+) \not\simeq (\mathbb{N},\cdot)$, $(\mathbb{Q},+) \not\simeq (\mathbb{Q}^+,\cdot)$, ale $(\mathbb{R},+) \simeq (\mathbb{R}^+,\cdot)$.

6. Dokažte, že žádné dvě z následujících algeber nejsou izomorfní: $(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{N},\cdot)$, $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Z},\cdot)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{Q},\cdot)$.