Cvičení 7.

1. Buď $\mathbf{R}$ komutativní okruh s jednotkou, $|R| > 1$. Dokažte, že
a) $\mathbf{R}$ je těleso $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{R}$ nemá žádné vlastní ideály;
b) je-li $\mathbf{I}$ ideál v $\mathbf{R}$, potom: $\mathbf{R}/\mathbf{I}$ je těleso $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{I}$ je maximální ideál v $\mathbf{R}$.

2. Buď $\mathbf{T}$ těleso. Dokažte, že ideál $\mathbf{I}$ je maximální v okruhu $\mathbf{T}[x]$ právě tehdy, když $I = fT[x]$ pro nějaký ireducibilní polynom f.

3. Kolik prvků má okruh $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2+1)$? Napište tabulky sčítání a násobení v tomto okruhu. Je to obor integrity?

4. Kolik prvků má okruh $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2+1)$? Jedná se o těleso?

5. Buď $\mathbf{I}$ ideál v okruhu $\mathbb{Z}[x]$ generovaný prvky 2 a x^2+x+1. Jakému známému okruhu je izomorfní faktorokruh $\mathbb{Z}[x]/\mathbf{I}$?

6. Dokažte, že matice, jejichž prvky jsou sudá čísla, tvoří ideál v okruhu $\mathbf{M}_n(\mathbb{Z})$. Dokažte, že příslušný faktorokruh je izomorfní okruhu $\mathbf{M}_n(\mathbb{Z}_2)$.