Cvičení 9.

1. Buď $\mathbf{T} \leq \mathbf{S}$ rozšíření těles, kde $\mathbf{S} \leq \mathbb{C}$ a $[\mathbf{S} : \mathbf{T}] = 2$. Dokažte, že potom existuje $s \in T$ tak, že $\mathbf{S} = \mathbf{T}(\sqrt{s})$.

2. Spočtěte $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}e^{\pi i/3}) : \mathbb{Q}]$. Jaký je minimální polynom prvku $\sqrt{2}e^{\pi i/3}$ nad $\mathbb{Q}$?

3. Nechť $\mathbf{T} \leq \mathbf{S}$ je rozšíření těles a $\varphi : \mathbf{S} \to \mathbf{S}$ buď $\mathbf{T}$-homomorfismus.

a) Pro libovolný nenulový $f \in \mathbf{T}[x]$ dokažte, že φ permutuje kořeny polynomu f, které leží v S.

b) Dovoďte z a), že φ je izomorfismus, je-li $\mathbf{T} \leq \mathbf{S}$ algebraické rozšíření. Najděte obecný příklad, kde φ není izomorfismus.

4. Najděte všechny $\mathbb{Q}$-automorfismy těles: a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, b) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, c) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

5. Najděte všechny $\mathbb{R}$-automorfismy tělesa $\mathbb{C}$.