Páté cvičení

2. listopadu 2012

Pokud $\leq$ je částečné uspořádání, tak prvek x je *maximální*, pokud neexistuje y ostře větší než x. Pokud pro každé y platí $y \leq x$, tak je x *největší* (rozmyslete si, že největší prvek je vždy maximální, ale naopak to platit nemusí). Podobně je to s pojmy minimální a nejmenší.

Supremum a infimum je definované jako v analýze: Supremum množiny X je prvek y, že y je horní mez X $(\forall x \in X, x \leq y)$ a zároveň je y mezi všemi prvky s touto vlastností nejmenší.

Uspořádaná množina je *svaz*, pokud každá její konečná podmnožina má supremum i infimum (stačí to ověřovat pro dvouprvkové podmnožiny).

Příklad 1. Nakreslete Hasseův diagram:

a) množiny $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ uspořádané dělitelností (tj. relací $a|b$),

b) množiny všech podmnožin $\{1, 2, 3\}$ uspořádané relací „$\subseteq$“.

Příklad 2. Zjistěte, zda existuje a jaký nejmenší počet prvků může mít uspořádaná množina taková, že:

1. má aspoň dva maximální a aspoň dva minimální prvky,
2. má aspoň dva největší prvky,
3. má aspoň jeden maximální, ale žádný nejmenší prvek,
4. má aspoň jeden maximální, ale žádný minimální prvek,
5. je konečná, každá podmnožina má supremum, ale nějaká podmnožina nemá infimum,
6. každá dvojice prvků má horní mez, ale nějaká dvojice nemá supremum.

Příklad 3. Najděte nějaké lineární uspořádání na množině $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Příklad 4. Rozhodněte, zda je množina $(\mathbb{N}, |)$ svazově uspořádaná. Co jsou suprema a infima? A existují suprema a infima všech podmnožin $\mathbb{N}$? (Nula není přirozené číslo.)

Příklad 5. Buď X množina. Rozhodněte, zda je množina $P(X)$ všech podmnožin X svazově uspořádaná relací inkluze. Co jsou suprema a infima?