Deváté cvičení

30. listopadu 2012

Buď R komutativní okruh, $f \in R[x]$ polynom. Hodnota $r \in R$ je kořen f, pokud $f(r) = 0$. Víme, že pak $(x-r)|f$. Násobnost kořene r je maximální $n \in \mathbb{N}$, že $(x-r)^n|f$.

Obor $\mathbb{Z}[x]$ *není euklidovský*. NSD polynomů nad $\mathbb{Z}$ můžeme počítat tak, že ho nejprve spočteme nad $\mathbb{Q}$ a potom se vypořádáme se soudělností koeficientů podle Gaussova lemmatu.

Příklad 1. Spočtěte NSD a NSN pro polynomy:

$$5x^3 + 15x^2 - 5x - 15$$
$$5x^3 + 20x^2 - 5x - 60.$$

Úlohu řešte:

a) v $\mathbb{Q}[x]$,

b) v $\mathbb{Z}[x]$,

c) v $\mathbb{Z}_{11}[x]$.

Příklad 2. Najděte polynom $f \in \mathbb{Q}[x]$ takový, že f má stupeň 3, jednoduchý kořen 1, dvojnásobný kořen 3 a $f(2) = 4$.

Příklad 3. V závislosti na parametru $a \in \mathbb{Q}$ určete násobnost kořene -1 polynomu $x^5 - ax^2 - ax + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

Příklad 4. Pro polynom $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ nad okruhem R definujeme jeho algebraickou derivaci $Df = na_n x^{n-1} + \cdots + a_1$. Značme $D^k f$ k-tou derivaci f. Rádi bychom aby platilo, že r je k-násobný kořen f, právě když $f(r) = Df(r) = \cdots = D^{k-1}f(r) = 0$ a $D^k f \neq 0$. To je velmi často pravda, problémy nám dělají jenom okruhy nenulové charakteristiky:

a) Spočtěte pomocí derivací násobnost kořene 2 polynomu

$$x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 33x^2 + 12x + 68 \in \mathbb{Z}[x].$$

b) Jak je to s násobností kořene 1 a hodnotami derivací polynomu $x^3 - 1$ nad $\mathbb{Z}_3$?