

Dvanáctá sada domácích úloh

Termín odevzdání 3/4. 1. 2013 18:00

Příklad 1. Jakou podgrupu generuje v $(\mathbb{Q}, +, -, 0)$ množina $\{6, 4/5\}$?

Příklad 2. Dokažte, že pro každé $n \geq 2$ je S_n generována množinou permutací $\{(1, 2), (1, 3), \dots, (1, n)\}$. Rada: Zkuste si to nejdřív dokázat pro $n = 4$.

Příklad 3. Dokažte, že dvojice prvků $(1, 3)$ a $(1, 2, 3, 4)$ *negeneruje* celou grupu S_4 .

Příklad 4. Najděte všechny podgrupy grupy A_4 . Zdůvodněte, že A_4 neobsahuje žádné další podgrupy než ty, co jste našli. (Lagrangeova věta vám ušetří práci.)

Příklad 5. Označme $GL_2(\mathbb{Q})$ grupu všech regulárních matic 2×2 nad \mathbb{Q} s operací maticového násobení (inverzní prvky jsou inverzní matice a jednotkový prvek je jednotková matice). Dokažte, že $GL_2(\mathbb{Q})$ lze nagerovat pomocí množiny matic

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Q} \right\}$$