Domácí úlohy 6.

odevzdat do 8.4. 9:00

Z tohoto domácího úkolu můžete získat až 12 bodů.

1. Buď $\mathbf{R}$ komutativní okruh s jednotkou a jeho ideál. Dokažte, že $\mathbf{R}/$ je obor integrity právě tehdy, když je prvoideál. Ideál nazýváme prvoideálem, pokud $ab \in I$ implikuje $a \in I$ nebo $b \in I$.

2. Všimněte si, že $\mathbb{Z}[x]/(x-1)$ není těleso, tedy ideál $(x-1)\mathbb{Z}[x]$ není maximální. Najděte ideál J takový, že $(x-1)\mathbb{Z}[x] \subset J \subset \mathbb{Z}[x]$.

3. Rozhodněte, zda je faktorokruh $\mathbb{Z}_3[x]/(x^3+x+1)$ tělesem. Pokud ano, zdůvodněte. Pokud ne, najděte nenulový prvek, který nemá inverz.

4. S kterým známým oborem je izomorfní faktorokruh $\mathbb{Q}[x]/(x^4-4)$?

5. S kterým známým tělesem je izomorfní faktorokruh $\mathbb{Z}[i]/(1+i)$?

6. Dokažte, že $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) : a \in \mathbb{Q}\}$ tvoří ideál podokruhu $\left(\begin{smallmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{smallmatrix}\right) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ okruhu $\mathbf{M}_2(\mathbb{Q})$. Dále dokažte, že $\left(\begin{smallmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{smallmatrix}\right) / \left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.