

Devátá sada domácích úloh

Termín odevzdání 6./7. 12. 18:00

Příklad 1. Spočtěte nad \mathbb{Z} NSD a NSN polynomů $52x^3 + 52x^2 + 4x + 4$ a $24x^2 + 6x - 18$.

Příklad 2. Najděte nějaký polynom $f \in \mathbb{Z}_{11}[x]$ takový, že f má jednoduchý kořen 3, trojnásobný kořen 0 (další čísla mohou a nemusí být kořeny f) a platí $f(1) = f(2)$.

Příklad 3. Bud' $n > 2$ celé. Dokažte, že v $\mathbb{Z}[x]$ neexistují nenulové polynomy f, g, h takové, aby platilo $f^n + g^n = h^n$. Můžete bez důkazu použít Velkou Fermatovu větu (Pro $n > 2$ neexistují nenulová $a, b, c \in \mathbb{Z}$, aby platilo $a^n + b^n = c^n$.) Rada: Dosad'te několik hodnot a použijte fakt, že nenulový polynom má jenom konečně mnoho kořenů.

Příklad 4. Najděte polynom $f \in \mathbb{Z}_{15}[x]$ stupně 3, který má aspoň 9 různých kořenů. Rada: Při počítání kořenů se vám může hodit čínská zbytková věta.

Příklad 5. Předpokládejte, že x, y jsou nesoudělné prvky \mathbb{Z} . Pro které hodnoty x, y jsou čísla $x + 2y$ a $2x + y$ nesoudělná v \mathbb{Z} ?