(1) **Najděte všechny kořeny rovnice $x^5 + \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x = 0$ v oboru komplexních čísel.**

Řešení. Okamžitě vidíme, že jeden kořen rovnice je $x = 0$:

$$x(x^4 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{3}{2}) = 0$$

Zavedeme substituci $y = x^2$ a celou rovnici vynásobíme 2:

$$2y^2 + 5y - 3 = 0$$

Vzoreček s diskriminantem nám dá 2 kořeny: $y_1 = -3$, $y_2 = \frac{1}{2}$, tedy po odmocnění dostaneme:

$$x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$x_{4,5} = \pm\sqrt{3}i$$

Tedy množina všech kořenů je rovna

$$\left\{0, \pm\sqrt{\frac{1}{2}}, \pm\sqrt{3}i\right\}$$

(2) **Najděte všechny kořeny rovnice $x^3 + 6x^2 + 10x + 8 = 0$ v oboru komplexních čísel.**

Řešení. Nejprve provedeme substituci $x = y - \frac{6}{3} = y - 2$ a řešíme jednodušší rovnici

$$y^3 - 2y + 4 = 0$$

Vidíme, že jeden kořen je roven 2, tedy $x_1 = -4$ a vydělením původní rovnice $(x + 4)$ dostaneme

$$x^3 + 6x^2 + 10x + 8 = (x + 4)(x^2 + 2x + 2)$$

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 - i^2 = (x + 1 + i)(x + 1 - i)$$

Tedy množina všech kořenů je rovna

$$\{-4, -1 - i, -1 + i\}$$

(3) **Najděte nenulový polynom s celočíselnými koeficienty takový, že číslo $e^{\frac{2\pi i}{3}} + 1$ je jeho kořenem.**

Řešení. Číslo $e^{\frac{2\pi i}{3}} + 1$ nejprve převedeme na algebraický tvar:

$$e^{\frac{2\pi i}{3}} + 1 = cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3} + 1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Tady si buď všimneme, že toto číslo je rovno $e^{\frac{\pi i}{3}}$ což je jeden z kořenů polynomu $x^3 + 1$. Nebo si uvědomíme, že součet i součin dvou komplexně sdružených čísel jsou reálná čísla a tedy koeficienty rovnice s kořeny $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ budou reálné:

$$(x - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(x - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)) = x^2 - x + 1$$

Tento polynom má koeficienty dokonce celočíselné, nemusíme ho tedy už dále upravovat. Alternativně, řešíme soustavu lineárních rovnic jako na cvičeních.

(4) **Najděte nenulový polynom s celočíselnými koeficienty takový, že číslo $i + \sqrt{2}$ je jeho kořenem.**

Řešení. Lze řešit podobně jako předchozí příklad, kde ale koeficienty kvadratického polynomu nebudou celočíselné:

$$(x - i - \sqrt{2})(x + i - \sqrt{2}) = x^2 - 2\sqrt{2}x + 3$$

Odmocniny se zbavíme přenásobením polynomem $x^2 + 2\sqrt{2}x + 3$ a dostaneme:

$$x^4 - 2x^2 + 9$$

Alternativně, řešíme soustavu lineárních rovnic jako na cvičeních.

(5) **Dokažte, že je-li číslo a transcendentní, pak je číslo $\sqrt{a}$ také transcendentní.**

Řešení. Dokážeme ekvivalentní tvrzení, že je-li číslo $\sqrt{a}$ algebraické, pak je číslo a také algebraické. Ukážeme elementární důkaz, aniž bychom využili netriviální teorie, ze které plyne, že množina algebraických čísel je uzavřená na násobení (jakási věta na konci skript), nebo že se každý polynom nad komplexními čísly rozkládá na lineární činitele (což sice každý ví, ale není vůbec jednoduché ukázat).

Předpokládáme, že $\sqrt{a}$ je algebraické, tedy $\exists f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ takový, že platí

$$f(\sqrt{a}) = 0$$

Tento polynom můžeme napsat jako součet polynomů $s(x)$ a $l(x)$ takových, že $s(x)$ obsahuje pouze sudé mocniny x a $l(x)$ pouze liché. Platí

$$s(\sqrt{a}) + l(\sqrt{a}) = 0$$
$$s(\sqrt{a}) = -\sqrt{a} \cdot l'(\sqrt{a})$$

kde platí, že $l'(x)$ obsahuje pouze sudé mocniny x. Označme $s(x^2)$ jako $g(x)$ a $l'(x^2)$ jako $h(x)$. Potom platí:

$$g(a) = -\sqrt{a} \cdot h(a)$$
$$g^2(a) = a \cdot h^2(a)$$
$$g^2(a) - a \cdot h^2(a) = 0$$

Tedy $F(x) = g^2(x) - x \cdot h^2(x)$ splňuje $F(a) = 0$, tedy a je algebraické.