(1) Najděte všechny racionální kořeny polynomu

$$f = 9x^4 - 6x^3 - 44x^2 + 30x - 5$$

a určete jejich násobnosti.

Řešení. Použijeme tvrzení o racionálních kořenech, tj. pokud je $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ racionální kořen polynomu $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ a $NSD\,(r,\, s) = 1$, tak platí $r \mid a_0$ a $s \mid a_n$. To nám pro daný polynom nabídne možnosti $x_0 \in \left\{\pm 5, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{5}{9}, \pm 1, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{9}\right\}$. Po vyzkoušení vidíme, že $\frac{1}{3}$ je kořenem.
Násobnost kořene zjistíme postupným dělením monočlenem $x - \frac{1}{3}$, anebo za použití kritéria násobnosti kořene dosazením do derivací: $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$, $f''\left(\frac{1}{3}\right) \neq 0$, takže $\frac{1}{3}$ je dvojnásobný kořen.

(2) Dokažte, že polynomy $x^4 + 1$ a $x^8 + 1$ jsou ireducibilní v $\mathbb{Z}[x]$. Rada: Použijte fakt, že $f\,(x)$ je ireducibilní, právě když $f\,(x + a)$ je ireducibilní (zvolte vhodně a).

Řešení. Využijeme rady ze zadání a zvolíme $a = 1$. Po dosazení do prvního polynomu dostaneme

$$f = (x + 1)^4 + 1 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 2$$

Tento polynom je podle Eisensteinova kritéria ireducibilní, protože f je primitivní, dvojka dělí všechny koeficienty kromě vedoucího a 2^2 nedělí absolutní člen. Tedy $x^4 + 1$ je také ireducibilní. Analogicky bychom ukázali ireducibilitu $x^8 + 1$

(3) Pomocí výsledků předchozích úloh rozložte v $\mathbb{Z}[x]$ na součin ireducibilních členů polynom $x^{16} - 1$.

Řešení. Pro rozkládání $x^{16} - 1$ můžeme využít známého vzorečku $a^2 - b^2 = (a - b)\,(a + b)$:

$$\begin{aligned} x^{16} - 1 &= \left(x^8 + 1\right)\left(x^8 - 1\right) \\ &= \left(x^8 + 1\right)\left(x^4 + 1\right)\left(x^4 - 1\right) \\ &= \left(x^8 + 1\right)\left(x^4 + 1\right)\left(x^2 + 1\right)\left(x^2 - 1\right) \\ &= \left(x^8 + 1\right)\left(x^4 + 1\right)\left(x^2 + 1\right)(x + 1)\,(x - 1) \end{aligned}$$

Všechny polynomy na posledním řádku jsou ireducibilní v $\mathbb{Z}[x]$: pro $x^8 + 1$ a $x^4 + 1$ jsme ireducibilitu dokázali v předchozím příkladu, u $x^2 + 1$ si všimneme, že nemá žádné celočíselné kořeny (nebo použijeme Eisensteinovo kritérium jako výše) a $x \pm 1$ jsou stupně 1, tedy ireducibilní.