(1) Najděte prvek maximálního řádu v S_8

Řešení. Víme z přednášky/skript, že řád permutace rozložené na součin disjunktních cyklů je nejmenší společný násobek délek těchto cyklů. Chceme tedy najít taková čísla, jejichž nejmenší společný násobek je co největší a přitom dávají součet nejvýše 8. Rozborem možností zjistíme, že tohle splňují čísla 5 a 3, tedy prvek maximálního řádu je např. $(1,2,3)(4,5,6,7,8)$.

(2) Obsahuje grupa A_8 (sudé permutace na $\{1,\cdots,8\}$) prvek řádu 10?

Řešení. Použijeme stejný fakt o řádu prvků v permutačních grupách jako v předchozím příkladu. Permutace řádu 10 na 8 prvcích musí mít jeden 2-cyklus, jeden 5-cyklus a jeden pevný bod. Ale taková je lichá, tedy v A_8 prvek řádu 10 neexistuje.

(3) Rozhodněte, zda množina $\{id, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$ je podgrupou S_4.

Řešení. Označme tuto množinu K. Aby byla podgrupou, musí obsahovat jednotkový prvek (tedy identitu) a být uzavřená na operace grupy S_4, tedy ke každému prvku musí mít prvek inverzní a výsledek složení dvou permutací z K musí být rovněž prvkem K.

- $id \in K$ je v zadání
- všechny ostatní prvky K jsou řádu 2 a tedy jsou samy k sobě inverzní: $a \circ a = id$, tedy $a = a^{-1}$
- složením dvou prvků různých od identity dostaneme vždy ten třetí, tj.

$$(1,2)(3,4) \circ (1,3)(2,4) = (1,3)(2,4) \circ (1,2)(3,4) = (1,4)(2,3)$$
$$(1,2)(3,4) \circ (1,4)(2,3) = (1,4)(2,3) \circ (1,2)(3,4) = (1,3)(2,4)$$
$$(1,3)(2,4) \circ (1,4)(2,3) = (1,4)(2,3) \circ (1,3)(2,4) = (1,2)(3,4)$$

(Vlastnosti z definice grupy, např. asociativitu, nemusíme ověřovat, to plyne z faktu, že používáme operaci grupy S_4 na prvcích této podgrupy.)