1. Buď R komutativní okruh, prvek $a \in R$ splňuje rovnost $a^3 = 0$. Dokažte, že k prvku $1 + a$ existuje v R inverzní prvek.

   Řešení. Hledáme prvek $b \in R$ takový, že platí $(1 + a) \cdot b = 1$. Protože $a^3 = 0$, budeme hledat tento prvek ve tvaru $b = b_0 + b_1 a + b_2 a^2$, kde $b_0, b_1, b_2 \in R$. Vynásobením dostaneme

   $$(1 + a)\left(b_0 + b_1 a + b_2 a^2\right) = b_0 + a\left(b_1 + b_0\right) + a^2\left(b_2 + b_1\right) + b_2 a^3$$

   Poslední člen můžeme vynechat, protože $a^3 = 0$, a dostaneme soustavu rovnic

   $$\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ b_1 + b_0 &= 0 \\ b_2 + b_1 &= 0 \end{aligned}$$

   Po vyřešení a dosazení vidíme, že

   $$(1 + a)^{-1} = a^2 - a + 1$$

2. Existuje uspořádaná množina, která má právě jeden minimální, ale žádný nejmenší prvek? Pokud ano, sestrojte ji!

   Řešení. Uvažujme podmnožinu racionálních čísel $\tilde{M} = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Tato množina je lineárně uspořádaná standardním uspořádáním racionálních čísel a nemá žádný minimální prvek (pokud by byl prvek $a = \frac{1}{n} \in \tilde{M}$ minimální, pak platí $\frac{1}{n+1} < a$, spor). Definujeme tedy množinu

   $$M = \tilde{M} \cup \{\bullet\}$$

   kde relace uspořádání na $\tilde{M}$ zůstává a prvek $\bullet$ je porovnatelný pouze sám se sebou. Tím pádem je prvek $\bullet$ minimální (nic není pod ním), a není nejmenší (nic není nad ním). Tedy množina M obsahuje jediný minimální prvek $\bullet$ a neobsahuje žádný nejmenší.

3. Najděte nějaké lineární uspořádání na množině $\mathbb{C}$.

   Řešení (Jedno z mnoha řešení)**.** Na množině komplexních čísel zavedeme tzv. lexikografické uspořádání, tj.

   $$a + bi \mathrel{\tilde{\leq}} c + di \;\Leftrightarrow\; (a \leq c) \vee (a = c \wedge b \leq d)$$

   kde $\leq$ označuje standardní uspořádání reálných čísel. Je třeba ověřit, že se skutečně jedná o lineární uspořádání, tedy že jsou splněny všechny axiomy částečného uspořádání a že se jedná o uspořádání lineární, tj. každé dva prvky jsou navzájem porovnatelné.

- **reflexivita**: pro každé komplexní číslo platí $a+bi \tilde{\leq} a+bi$, neboť $a = a \wedge b \leq b$
- **tranzitivita**: nechť platí $a+bi \tilde{\leq} c+di$ a $c+di \tilde{\leq} e+fi$. Tedy musí platit $a \leq c \wedge c \leq e$. Pokud je aspoň jedna z nerovností ostrá, platí i $a < e$ a tedy $a+bi \tilde{\leq} e+fi$. Pokud platí $a = c = e$, pak podle předpokladu musí být $b \leq d \leq f$ a tedy $a+bi \tilde{\leq} e+fi$. (Pozn.: využíváme tranzitivity uspořádání reálných čísel).
- **antisymetrie**: podobně jako v předchozím případě využijeme antisymetrie uspořádání reálných čísel: pokud $a+bi \tilde{\leq} c+di$ a $c+di \tilde{\leq} a+bi$, potom nutně musí být $a = c$ a $b = d$, tedy $a+bi = c+di$.
- **linearita** plyne ihned linearity standardního uspořádání na $\mathbb{R}$.

4. Rozhodněte, které z následujících čtyř uspořádaných množin jsou svazově uspořádané (tj. zda pro každou dvojici prvků existují supremum a infimum).

   Řešení. a) a d) jsou svazy (v řešení se od vás očekávalo nějaké zdůvodnění, aspoň obrázkem)
   b) není svaz - např. horní dvojice prvků nemá supremum
   c) není svaz - např. proto, že žádná dvojice prvků ležících na stejné hladině nemá supremum