(1) Spočtěte NSD a NSN polynomů $52x^3 + 52x^2 + 4x + 4$ a $24x^2 + 6x - 18$ v $\mathbb{Z}[x]$.

Řešení. Podle věty z přednášky pro polynomy $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ platí $NSD_{\mathbb{Z}[x]}(f, g) = NSD_{\mathbb{Z}}(c(f), c(g)) \cdot NSD_{\mathbb{Q}[x]}(pp(f), pp(q))$, kde $c(f)$ značí NSD koeficientů a $pp(f)$ primitivní část. Vidíme, že

$$NSD_{\mathbb{Z}}(c(f), c(g)) = NSD_{\mathbb{Z}}(4, 6) = 2$$
$$pp(f) = 13x^3 + 13x^2 + x + 1 = \left(13x^2 + 1\right)(x + 1)$$
$$pp(g) = 4x^2 + x - 3 = (4x - 3)(x + 1)$$

Toto jsou rozklady na ireducibilní prvky, protože $13x^2 + 1$ nemá v $\mathbb{Q}$ kořen a ostatní polynomy v rozkladech jsou stupně 1. Tedy $NSD_{\mathbb{Q}[x]}(pp(f), pp(q)) = x + 1$ a

$$NSD_{\mathbb{Z}[x]}\left(52x^3 + 52x^2 + 4x + 4, 24x^2 + 6x - 18\right) = 2(x + 1).$$

Nejmenší společný násobek spočítáme snadno z uvedených rozkladů nebo podle vzorečku $NSN(f, g) = \frac{fg}{NSD(f,g)}$ a vyjde nám

$$NSN_{\mathbb{Z}[x]}(f, g) = 12(x + 1)\left(13x^2 + 1\right)(4x - 3).$$

(2) Najděte nějaký polynom $f \in \mathbb{Z}_{11}[x]$ stupně 5 takový, že f má jednoduchý kořen 3, trojnásobný kořen 0 (další čísla mohou a nemusejí být kořeny f) a platí $f(1) = f(2)$.

Řešení. Aby platilo, že f má jednoduchý kořen 3 a trojnásobný kořen 0, položíme

$$f = x^3(x + 8)g$$

a hledáme g takové, aby byla splněna podmínka $f(1) = f(2)$. Vidíme, že platí:

$$f(1) = 9g(1)$$
$$f(2) = 3g(2)$$

Zkusíme najít g ve tvaru $x + a$ tak, aby platilo $9g(1) = 3g(2)$, tj. $3g(1) = g(2)$.

$$3 + 3a \equiv 2 + a \pmod{11}$$
$$2a \equiv -1 \pmod{11}$$
$$a \equiv 5 \pmod{11}$$

Tedy polynom splňující podmínky zadání je např.

$$f = x^3(x + 8)(x + 5).$$

(3) Najděte polynom $f \in \mathbb{Z}_{15}[x]$ stupně 3, který má aspoň 9 různých kořenů.

Řešení. Jinými slovy, hledáme celočíselný polynom takový, že pro dostatek hodnot a platí $15 \mid f(a)$. Součin tří po sobě jdoucích čísel je vždy dělitelný 3, tedy hodnota polynomu $x(x + 1)(x + 2)$ je vždy násobek 3. Takže pro

$$f = 5x(x + 1)(x + 2)$$

platí $f(a) = 0$ v $\mathbb{Z}_{15}$ pro každé $a \in \mathbb{Z}_{15}$.

(4) Předpokládejte, že x, y jsou nesoudělné prvky $\mathbb{Z}$. Pro které hodnoty x, y jsou čísla $x+2y$ a $2x + y$ nesoudělná v $\mathbb{Z}$?

Řešení. Použijeme odečítací verzi Eukleidova algoritmu, tj. využijeme toho, že $NSD(a,\ b) = NSD(b,\ a) = NSD(a,\ a - b)$.

$$\begin{aligned} NSD(x + 2y,\ 2x + y) &= NSD(x + 2y,\ x - y) \\ &= NSD(x - y,\ 3y) \end{aligned}$$

Z předpokladů plyne, že $NSD(x - y,\ y) = NSD(x,\ y) = 1$, takže $NSD(x - y,\ 3y)$ je buď 1 nebo 3, přičemž hodnota je 3 právě tehdy, když $3 \mid x - y$. Tedy čísla $x + 2y$ a $2x + y$ jsou nesoudělná, právě když $3 \nmid x - y$.