ČÁST I.

Řešení první části pište do vymezeného místa. Tvrzení a definice pečlivě formulujte včetně všech předpokladů a značení. Odpovědi na příklady stručně zdůvodněte (v rámci vymezeného místa). Každá úloha se hodnotí třemi body. První část testu se bude sbírat po 60 minutách!

1. Napište Čínskou větu o zbytcích.

2. Napište větu, která popisuje, jak v gaussovských oborech vypadají dělitelé prvku s daným ireducibilním rozkladem.

3. Napište, jak spolu souvisí ireducibilita polynomů v $\mathbf{R}[x]$ a v $\mathbf{Q}[x]$, kde $\mathbf{Q}$ je podílové těleso oboru $\mathbf{R}$.

4. Platí pro obor $\mathbb{Z}[i]$ Bézoutova rovnost? Pokud ano, formulujte. Pokud ne, uveďte protipříklad.

5. Uveďte dvě ekvivalentní definice pojmu řád prvku.

6. Existuje svaz bez nejmenšího prvku? Pokud ano, uveďte příklad, pokud ne, stručně zdůvodněte.

7. Platí $2x^2 - 1 \parallel x^2 + 2$ a) v oboru $\mathbb{Q}[x]$, b) v oboru $\mathbb{Z}_3[x]$, c) v oboru $\mathbb{Z}_5[x]$?

8. Najděte ireducibilní rozklad prvku $1 + 3\sqrt{2}$ v oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

9. Tvoří všechny funkce $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se skládáním grupu? Stručně zdůvodněte.

10. Existuje neabelovská 12-prvková grupa? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

11. Uvažujme působení grupy $\mathbf{D}_8$ všech symetrií čtverce na množinu všech obarvení šachovnice 4×4 dvěma barvami. Kolik prvků má stabilizátor obarvení, kde je jedno vnitřní políčko černé a ostatní bílá?

12. Spočtěte 9^{8^7} mod 7.

ČÁST II.

13. (10 bodů) Buď $\mathbf{R}$ obor integrity. Definujte obor $\mathbf{R}[x]$ (co jsou přesně prvky? co jsou operace?) a dokažte, že to je také obor integrity.

14. (12 bodů)

a) Rozložte polynom $x^8 - 1$ v oboru $\mathbb{Z}_3[x]$.

b) Rozložte polynom $x^9 - 1$ v oboru $\mathbb{Z}_3[x]$.

c) Zdůvodněte, proč lze každý polynom v $\mathbb{Z}_3[x]$ rozložit právě jedním způsobem na součin ireducibilních.

15. (10 bodů) Dokažte, že je grupa A_n ($n \geq 3$) generovaná

a) množinou všech trojcyklů;

b) množinou trojcyklů $\{(1\ 2\ 3),\ (1\ 2\ 4),\ \dots,\ (1\ 2\ n)\}$.

16. (12 bodů) Buď G grupa, H její podgrupa a $a, b \in H$.

a) Dokažte, že $aH = bH$ právě tehdy, když $a^{-1}b \in H$.

b) Ukažte příklad G, H, a, b kdy $aH = bH$, ale $ab^{-1} \notin H$.

c) Dokažte Eulerovu větu za pomocí Lagrangeovy věty.