Tvrzení a definice pečlivě formulujte včetně všech předpokladů. Odpovědi na otázky zdůvodněte. Pokud používáte nějaké netriviální tvrzení z přednášky, uveďte explicitně odkaz (často budete vyzváni, abyste všechna použitíá tvrzení zformulovali). Časový limit je 160 minut.

1. (2 body) Uveďte definici direktního součin dvou algeber $(A, *, +)$ a $(B, \cdot, \circ)$ typu (2,2).

2. (3 body) Formulujte Cayleyovu reprezentaci grup. Uveďte explicitně, jak to zobrazení vypadá, vysvětlete značení.

3. (5 bodů) Rozhodněte, zda je grupa $\mathbb{Z}_{24}^*$ cyklická. Své tvrzení zdůvodněte. Formulujte všechna tvrzení, která používáte.

4. (5 bodů) Rozhodněte, zda je faktorokruh $\mathbb{Q}[x]/(x^2 + 2)$ tělesem. Formulujte všechna tvrzení, která používáte.

5. (3 body) Číslo $a \in \mathbb{R}$ nazveme konstruovatelné, pokud, je-li dána úsečka délky 1, lze zkonstruovat pravítkem a kružítkem úsečku délky a. Je číslo $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}$ konstruovatelné? Stručně zdůvodněte.

6. (4 body) Definujte pojem algebraického uzávěru a napište, jak vypadá algebraický uzávěr tělesa $\mathbb{Q}$.

7. (6 bodů) Definujte pojem kořenového a rozkladového nadtělesa. Uveďte, až na izomorfismus, všechna kořenová a všechna rozkladová nadtělesa polynomu $(x^3 + 2)(x^2 + 2)$ nad $\mathbb{Q}$.

8. (12 bodů) Definujte pojem stupeň rozšíření těles a pojem algebraického rozšíření. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

(1) Algebraická rozšíření mají konečný stupeň.
(2) Rozšíření konečného stupně jsou algebraická.

Pravdivá tvrzení dokažte. Pro nepravdivá tvrzení uveďte protipříklad.

9. (8 bodů) Dokažte, že eukleidovské obory jsou obory hlavních ideálů.

10. (8 bodů) Buď **G** grupa. Pro každé $a \in G$ definujeme zobrazení $\psi_a : G \to G$ předpisem $\psi_a(x) = axa^{-1}$. Definujeme zobrazení $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{S}_G$ předpisem $\varphi(a) = \psi_a$. Dokažte, že skutečně $\psi_a \in S_G$ a rozhodněte, zda je zobrazení φ homomorfismus. Uveďte příklad grupy, pro kterou je zobrazení φ prosté, a uveďte příklad grupy, pro kterou prosté není.

11. (12 bodů) Uvažujme grupu $\mathbf{D}_{20}$ všech symetrií pravidelného 10-úhelníka a její podgrupu $\mathbf{H}$ sestávající z identity a středové symetrie.

a) Dokažte, že $\mathbf{H}$ je normální podgrupou v $\mathbf{D}_{20}$.

b) Rozhodněte, zda je faktorgrupa $\mathbf{D}_{20}/\mathbf{H}$ abelovská.

Formulujte všechna tvrzení, která používáte.

12. (12 bodů)

a) Uveďte, jak vypadají prvky prvky tělesa $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/5})$. Jaký je stupeň tohoto rozšíření nad $\mathbb{Q}$?

b) Uveďte, jak vypadají prvky grupy $\mathbf{Gal}(\mathbb{Q}(e^{2\pi i/5}) : \mathbb{Q})$. Je tato grupa cyklická?

Formulujte všechna tvrzení, která používáte. Bez důkazu můžete využít fakt, že polynom $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ je v $\mathbb{Q}[x]$ ireducibilní.