Domácí úlohy 1.

odevzdat do 1.3. 10:40

1. (3 body) Rozhodněte, zda je svaz $(\mathbb{N}, |\,)$ a) modulární, b) distributivní. (Všimněte se, že analogický argument projde v libovolném gaussovském oboru.)

2. (5 bodů) Buď C množina všech konvexních podmnožin roviny $\mathbb{R}^2$. Dokažte, že je $(C, \subseteq)$ svaz (co jsou operace $\vee, \wedge$?) a rozhodněte, zda je a) modulární, b) distributivní.

3. (6 bodů) Rozhodněte, pro která n je svaz $(Eq(n), \subseteq)$ všech ekvivalencí na n-prvkové množině a) modulární, b) distributivní. Dokažte, že pro dvě ekvivalence α, β na libovolné množině X platí

$$\alpha \vee \beta = \{(a, b) : \text{ existuje } u_1, \ldots, u_k \text{ splňující } a = u_1 \,\alpha\, u_2 \,\beta\, u_3 \,\alpha\, u_4 \,\beta\, u_5 \ldots u_k = b\}.$$

4. (6 bodů) Uvažujme svazy $(Sub(\mathbf{G}), \subseteq)$, kde $\mathbf{G}$ je grupa.

a) Najděte příklad grupy $\mathbf{G}$, kde $(Sub(\mathbf{G}), \subseteq)$ není modulární.
b) Dokažte, že pro abelovskou grupu $\mathbf{G}$ je svaz $(Sub(\mathbf{G}), \subseteq)$ vždy modulární. Můžete využít faktu, že $A \vee B = A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ (což v neabelovských grupách neplatí).
c) Najděte příklad abelovské grupy $\mathbf{G}$, kde $(Sub(\mathbf{G}), \subseteq)$ není distributivní. Návod: uvažujte nějaký vektorový prostor na konečným tělesem – to je taky abelovská grupa.

5. (5 bodů) Dokažte, že pokud svaz není distributivní, obsahuje kopii N_5 nebo M_3 jako podsvaz. (Nemusíte sepisovat detaily, stačí hlavní myšlenka. Detaily si ověřte pro sebe.)