Domácí úlohy 4.

odevzdat do 22.3. 10:40

Připomeňme cvičení, kde se dokazovalo, že $\mathbf{Aut}(\mathbb{Z}_n) \simeq \mathbb{Z}_n^*$, prvku $k \in \mathbb{Z}_n^*$ odpovídá automorfismus $x \mapsto kx$. Dále se vám bude hodit lemma z prosemináře o tom, jak rozložit grupu na direktní součin.

1. (4 body) Dokažte, že pokud jsou m, n nesoudělné, pak $\mathbb{Z}_{mn}^* \simeq \mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_n^*$.
Poznámka: To se dá interpretovat jako $\mathbf{Aut}(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n) \simeq \mathbf{Aut}(\mathbb{Z}_m) \times \mathbf{Aut}(\mathbb{Z}_n)$. *Dokonce platí obecně následující: pokud jsou řády grup* $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ *nesoudělné, pak* $\mathbf{Aut}(\mathbf{G} \times \mathbf{H}) \simeq \mathbf{Aut}(\mathbf{G}) \times \mathbf{Aut}(\mathbf{H})$. *Myšlenka důkazu by měla být stejná.*

2. (2 body) Dokažte, že $\mathbf{Aut}((\mathbb{Z}_p)^d) \simeq \mathbf{GL}(d, \mathbb{Z}_p)$. Zde $(\mathbb{Z}_p)^d$ značí direktní součin d kopií grupy $\mathbb{Z}_n$ a $\mathbf{GL}(d, T)$ je grupa regulárních matic $d \times d$ nad tělesem T.

3. (4 body) Spočtěte všechny prvky $\mathbf{Aut}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2)$.

4. (4 body) Dokažte, že grupa $\mathbb{Z}_{2^k}^*$ není cyklická pro žádné $k > 2$. Návod: stačí ji umět rozložit na direktní součin.
Poznámka: Dokonce platí, že je tato grupa izomorfní $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^{k-2}}$, *ale jednoduchý argument mě z hlavy nenapadá, tak to dokazovat nemusíte :-).*

5. (6 bodů) Buď $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ normální podgrupy grupy $\mathbf{G}$. Dokažte, že $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$ tvoří normální podgrupu grupy $\mathbf{G}$. Dále dokažte, že pokud $A \cap B = \{1\}$ a $AB = G$, pak $\mathbf{G} \simeq \mathbf{G}/\mathbf{A} \times \mathbf{G}/\mathbf{B}$. Návod: Uvažujte homomorfismus $x \mapsto (xA, xB)$. Obtížné je dokázat, že je toto zobrazení na. K tomu se hodí pozorování, že pro každé $x \in G$ existuje $b \in B$ takové, že $xA = bA$ a analogicky pro xB.