Domácí úlohy 5.

odevzdat do 5.4. 10:40

1. (10 bodů) Buď $\mathbf{G}$ konečná abelovská grupa a $\mathbf{H}$ její podgrupa. Dokažte, že existuje podgrupa grupy $\mathbf{G}$ izomorfní s $\mathbf{G}/\mathbf{H}$. Uveďte příklad neabelovské grupy a její normální podgrupy, pro kterou tvrzení neplatí. Uveďte příklad nekonečné abelovské grupy a její podgrupy, pro kterou tvrzení neplatí.

2. (3 body) Dokažte Základní větu aritmetiky jako důsledek Klasifikace konečných abelovských grup.

3. (3 body) Buď $\mathbf{G}$ konečná abelovská grupa a p prvočíslo takové, že $p \mid |G|$. Dokažte, že grupa $\mathbf{G}$ obsahuje prvek řádu p.

4. (4 body) Předchozí tvrzení platí i pro neabelovské grupy. Dokažte! Návod: sporem indukcí, předpokládejme, že $\mathbf{G}$ je nejmenší grupa, pro kterou tvrzení neplatí. Vzpomeňte si na působení grupy na své nosné množině konjugací, na rovnici $|G| = |Z(G)| + \sum |O|$ a na vztah $|G| = |G_x| \cdot |[x]|$. Pokud $p \mid |Z(G)|$, použijte předchozí cvičení. Pokud $p \mid |G_x|$, použijte indukční předpoklad. Dokončete důkaz sami.