

Domácí úlohy 6.
odevzdat do 26.4. 10:40

1. (4 body) Předpokládejme, že

$$R = \{xy - x^3 - x^2, x^4 + x^3 + x\}$$

je Gröbnerova báze vzhledem k $<_{\text{LEX}}, x < y$. Zjistěte, zda polynom $x^4y^4 + x^3y^3$ náleží do ideálu $\langle R \rangle$.

2. (4 body) Dokažte, že R z předchozího cvičení není Gröbnerovou bází vzhledem k $<_{\text{LEX}}, x > y$.

3. (4 body) Najděte Gröbnerovu bází ideálu

$$\langle xy^2 - 1, x - y \rangle$$

v $\mathbb{Q}[x, y]$ vzhledem k nějakému uspořádání (dle vlastního výběru). Náleží polynom $x^5 - 1$ tomuto ideálu?

4. (4 body) Uvažujme Algoritmus A pro polynomy jedné proměnné. Mějme polynom $r \in T[x]$. Pak $\{r\}$ je zřejmě Gröbnerova báze hlavního ideálu $rT[x]$. Ukažte, že výsledkem algoritmu A na polynom f je zbytek po dělení $f \bmod r$.

5. (4 body) Uvažujme Buchbergerův algoritmus pro polynomy jedné proměnné. Mějme na vstupu dva polynomy $r, s \in T[x]$. Který polynom je do báze přidán jako poslední?

Poznámka: Druhý zajímavý speciální případ je, když jsou všechny polynomy na vstupu lineární. Rozmyslete si, že Buchbergerův algoritmus provádí jakousi variantu Gaussovy eliminace. (Řešení neodevzdávajíte.)