Domácí úlohy 8.

odevzdat do 10.5. 10:40

1. (5 bodů) Dokažte za pomoci axiomu výběru, že každé zobrazení $f : A \to B$, které je *na* B, má pravý inverz, tj. že existuje zobrazení $g : B \to A$ takové, že $fg(x) = x$ pro všechna $x \in B$.

2. (8 bodů) Bod $x \in \mathbb{R}$ se nazývá *akumulační* pro množinu $A \subseteq \mathbb{R}$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $a \in A$ takové, že $|a - x| < \varepsilon$.

(a) Dokažte za pomoci axiomu výběru, že ke každému akumulačnímu bodu x pro A existuje posloupnost (a_n) prvků množiny A taková, že $\lim a_n = x$.

(b) Dokažte toto tvrzení pro množinu $A = \mathbb{Q}$ *bez pomoci axiomu výběru.*

3. (7 bodů) Dokažte za pomoci axiomu výběru, že spočetné sjednocení spočetných množin je spočetná množina.
Formálně, množina M je spočetná, pokud existuje prosté zobrazení $M \to \mathbb{N}$. Máme tedy dány množiny A_i, $i \in I$, a prostá zobrazení $f_i : A_i \to \mathbb{N}$ a $f : I \to \mathbb{N}$. Dokažte, že existuje prosté zobrazení $\bigcup_{i \in I} A_i \to \mathbb{N}$. Můžete předpokládat existenci bijekce $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.