Časový limit je 90 minut. Všechna tvrzení, důkazy, výpočty atd. pečlivě formulujte a zapište, včetně všech předpokladů. Výsledek početní úlohy musí být zřetelný. Minimální počet bodů k úspěšnému složení zkoušky je 30. Známka bude určena podle celkového dojmu z testu, v případě nesouhlasu může následovat ústní zkoušení.

1. (10 bodů)

(a) Napište nějaký algoritmus na interpolaci polynomů.

(b) Buď $\mathbf{T} \leq \mathbf{S}$ rozšíření těles a $a \in S$. Definujte minimální polynom prvku a nad $\mathbf{T}$.

2. (10 bodů) Dokažte, že v oborech integrity, kde existují NSD všech dvojic prvků, má každý prvek nejvýše jeden ireducibilní rozklad.

3. (10 bodů) Dokažte, že existuje transcendentní číslo.

4. (10 bodů)

(a) Je prvek $12 - 5i$ ireducibilní v $\mathbb{Z}[i]$?

(b) Rozhodněte, zda $\mathbb{Q}[x]/(x^3 - 2) \simeq \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$.

5. (10 bodů) Rozhodněte, zda množina $\{f \in \mathbb{Z}_2[x] : f^2 = 2f\}$ tvoří a) ideál, b) hlavní ideál v oboru $\mathbb{Z}_2[x]$.

6. (10 bodů) Spočtěte minimální polynom posloupnosti $(0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, \dots)$ nad tělesem $\mathbb{Z}_3$.