

1. Napište Čínskou větu o zbytcích (pro celá čísla).
2. Napište kritérium existence racionálního kořene pro celočíselné polynomy.
3. Formulujte Eukleidův algoritmus v oboru Gaussových celých čísel.
4. Je obor  $\mathbb{Z}$  Gaussovský? Je Eukleidovský? Stručně zdůvodněte. Pokud je Eukleidovský, uveďte normu.
5. Uveďte nějaký postup na výpočet inverzního prvku v grupě  $\mathbb{Z}_n^*$ .
6. Nechť grupa  $\mathbf{G}$  působí na množinu  $X$  a buď  $x \in X$ . Napište vztah mezi velikostmi  $G$ ,  $G_x$  a  $[x]$ .

7. Je  $(\mathbb{Z}, \cdot, ^{-1}, 1)$  grupa? Stručně zdůvodněte.
8. Je grupa  $\mathbb{Z}$  cyklická? Stručně zdůvodněte.
9. Kolik prvků řádu 3 má grupa  $\mathbb{Z}_{12}^*$ ?
10. Uvažujme působení grupy  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{T})$  na vektorový prostor  $T^n$ , kde akce matice  $A$  na vektoru  $v$  je definovaná jako  $Av$ . Vypište orbity.
11. Platí  $3x^2 + 2x \parallel 3x + 2$  a) v oboru  $\mathbb{Z}[x]$ , b) v oboru  $\mathbb{Q}[x]$ ?
12. Je prvek  $i\sqrt{2}$  ireducibilní v oboru  $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ ?

13. (2 body) Spočtěte  $5^{444}$  mod 132.
14. (2 body) Rozložte prvek  $1 + 18i$  na součin ireducibilních v oboru  $\mathbb{Z}[i]$ .
15. (2 body) Vypište prvky podgrupy generované prvky 9, 15 v grupě  $\mathbb{Z}_{45}$ .
16. (2 body) Kolik náhrdelníků délky 8 lze sestavit kuliček dvou barev? Nezáleží na poloze náhrdelníku, je možno jej převracet či otáčet.



- 17.** (10 bodů) Formulujte a dokažte základní větu aritmetiky. Předpokládejte platnost Bézoutovy rovnosti.
- 18.** (6 bodů) Dokažte klasifikaci cyklických grup.