Termíny odvezdání jsou **16.4.** pro úlohy 1-5, **28.5.** pro zbytek.

1. (2 body) Spočtěte kořeny polynomu $x^3 + 2x + 1$ v $\mathbb{F}_{27} = \mathbb{Z}_3[\alpha]/\alpha^3 + 2\alpha + 1$.

2. (2 body) Spočtěte NSD$(x^3 + 2\alpha x + \alpha^2, (\alpha+1)x^3 + (\alpha^2+2))$ v $\mathbb{F}_{27} = \mathbb{Z}_3[\alpha]/\alpha^3 + 2\alpha + 1$.

3. (3 body) Uveďte kořenová a rozkladová nadtělesa polynomu $x^5 + x^4 + 1$ a) nad tělesem $\mathbb{Q}$, b) nad tělesem $\mathbb{F}_2$.

4. (2 body) Vypište prvky čtyřprvkového podtělesa tělesa $\mathbb{F}_{16} = \mathbb{Z}_2[\alpha]/\alpha^4 + \alpha + 1$. Najděte nějaký primitivní prvek v $\mathbb{F}_{16}$. Kolik jich je celkem?

5. (2 body) Uvažujte rozšíření $\mathbb{F}_3 \leq \mathbb{F}_{81} = \mathbb{Z}_3[\alpha]/\alpha^4+\alpha^2+\alpha+1$. Najděte minimální polynom prvku $\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 2$ nad $\mathbb{F}_3$.

6. (2 body) Rozložte cyklotomický polynom $Q_{15} \in \mathbb{F}_2[x]$ na součin ireducibilních.

7. (2 body) Uvažujme polynom $f_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} \in \mathbb{F}_2[x]$. Dokažte, že je tento polynom rozložitelný kdykoliv je n složené, a najděte nejmenších pět prvočísel n, pro něž je ireducibilní.

8. (1 bod) Najděte nejmenší těleso, nad nímž je polynom $1 + x + x^2 + \ldots + x^{22}$ ireducibilní.

9. (3 body) Spočtěte hodnoty cyklotomických polynomů $Q_n(0)$ a $Q_n(1)$ pro každé n. Dokažte, že $Q_n(-x) = Q_{2n}(x)$ pro každé $n > 1$ liché.

10. (2 body) Spočtěte a) $\sum_{d|n} \mu(d)\varphi(d)$, b) $\sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d})\delta(d)$, kde φ značí Eulerovu funkci a δ počet dělitelů daného čísla.

BONUS (10-7-4-2-1 bodů pro prvních pět řešitelů)
Spočtěte $\sum_{d|n}(-1)^d\varphi(d)$, kde φ značí Eulerovu funkci.