1. (12)

(a) Dokažte stručně, že jediné grupy prvočíselné velikosti jsou $\mathbb{Z}_p$.
(b) Napište Burnsideovu větu.
(c) Vypište Sylowovy 2-podgrupy grupy D_{18}.
(d) Definujte pojem horní centrální řady. Co je to nilpotentní grupa? Uveďte příklad nenilpotentní grupy.

2. (10) Definujte pojem kompoziční řady a dokažte Jordan-Hölderovu větu. Zassenhausovo lemma stačí zformulovat.

3. (10) Dokažte, že grupa izometrií v Eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^n$ je semidirektním součinem grup $\mathbb{R}^n$ a $O_n(\mathbb{R})$.

4. (10) Definujte komutátorovou podgrupu G' grupy G, dokažte, že je normální, a dokažte, že pro každou normální podgrupu N v G je G/N abelovská právě tehdy, když $N \leq G'$.

5. (10) Nechť' $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Najděte matici $V \in GL(3,\mathbb{Z})$ tak, aby existovala matice $U \in GL(4,\mathbb{Z})$, pro kterou bude $UAV = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dále zjistěte jak vypadá rozklad grupy $\mathbb{Z}^4/\langle(2,0,4,6),(4,3,-1,0),(-1,-1,1,1)\rangle$ jako direktní součet cyklických grup.

6. (10) Ukažte, že D_{12} má presentaci $\langle a, b \mid a^2, b^2, (ab)^6\rangle$.

7.

a) (5) Rozhodněte, zda je $\hat{\mathbb{Z}}_p$ (aditivní grupa p-adických čísel) divisibilní.
b) (5) Nakreslete orientovaný Cayleyho graf S_3 vzhledem k množině generátorů $\{(1,2),(2,3)\}$.

8. (10) Je dána podgrupa $A \subseteq \mathbb{Z}^m$. Navrhněte algoritmus, který rozhodne, zda existuje $B \subseteq \mathbb{Z}^m$ tak, aby $A \cap B = 0$ a $A + B = \mathbb{Z}^m$. V případě, že B existuje by měl algoritmus nalézt grupu B (stačí popsat slovy, jak by algoritmus pracoval).