Domácí úlohy 1.

odevzdat do 23.10. 10:40

1. (10 bodů) Dokažte, že předpis

$$i \mapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad j \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

lze rozšířit do prostého homomorfismu grup $Q_8 \to GL_2(\mathbb{C})$.

2. (10 bodů) Spočtěte všechny podgrupy a všechny normální podgrupy grupy (a) Q_8 (osmiprvková kvaternionová grupa), (b) A_4 (dvanáctiprvková alternující grupa), nakreslete diagram uspořádané množiny všech podgrup (uspořádání $\subseteq$) a vyznačte v něm ty, které jsou normální.

V obou úlohách nemusíte do poslední podrobnosti rozepisovat postup výpočtu, ale mělo by být jasné, jak jste na to přišli (tj. akceptuji uměřeně použité "a podobným způsobem spočteme, že…").

Úlohy na procvičování.

1. Jsou permutace (1 2 5 7)(3 6 10 11 12 9) a (1 2 3 4)(5 6 7 8 9 10) konjugované v grupě A_{12} ?

2. Uvažujme grupu G a prvek $a \in G$ takový, že $a^m = 1$. Nechť n je takové, že $NSD(m,n) = 1$. Dokažte, že existuje $b \in G$ takové, že $a = b^n$.

Izomorfismus.

3. Rozhodněte, zda jsou grupy $D_{12} \simeq S_3 \times \mathbb{Z}_2$ izomorfní.

4. Rozhodněte, zda jsou grupy $\mathbb{Z}_{24}^*$ a $\mathbb{Z}_{12}^*$ izomorfní.

5. Rozhodněte, zda je grupa S_n izomorfní nějaké podgrupě a) grupy A_{n+1}, b) grupy A_{n+2}.

Generátory.

6. Buď n liché. Dokažte, že $A_n = \langle (1\ 2\ 3),\ (1\ 2\ 3\ \dots\ n) \rangle$.

7. Buď p prvočíslo. Dokažte, že $S_p = \langle \tau, \rho \rangle$, kde τ je libovolná transpozice a ρ je libovolný n-cyklus. Uveďte protipříklad pro p složené.

8. Buď H vlastní podgrupa grupy G. Dokažte, že $\langle G \setminus H \rangle = G$.

Podgrupy a Lagrangeova věta.

9. Spočtěte všechny podgrupy a všechny normální podgrupy grup $\mathbb{Z}_{120}$ a $\mathbb{Z}_{131}^*$.

10. Buď H, K konečné podgrupy grupy G. Dokažte, že $|H| \cdot |K| = |H \cap K| \cdot |HK|$, kde $HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$. *Návod:* použijte podobnou metodu jako v důkazu Lagrangeovy věty.

Homomorfismy.

11. Napište všechny homomorfismy $\mathbb{Z}_{10} \to S_3$, $\mathbb{Z}_{11} \to S_3$; $\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{11}^*$, $\mathbb{Z}_{11}^* \to \mathbb{Z}_6$; $\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$.

12. Napište všechny homomorfismy $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ a spojité homomorfismy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Existuje nějaký nespojitý?