Domácí úlohy 2.

odevzdat do 6.11. 10:40

1. (5 bodů) Spočtěte centrum grupy $GL_n(\mathbb{C})$: popište jeho prvky a určete, s kterou známou grupou je izomorfní.

2. (8 bodů) Spočtěte grupu $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2)$: popište její prvky a určete, s kterou grupou ze seznamu malých grup je izomorfní.

3. (10 bodů) Dokažte, že $\mathrm{Aut}(D_8) \simeq D_8$, ale $|\mathrm{Aut}(D_{16})| > 16$. K obojemu se hodí tvrzení, že $\mathrm{Inn}(D_{4n}) \simeq D_{2n}$ (co je centrum? co je faktor podle centra? nemusíte dokazovat obecně, stačí pro $n = 2, 4$). K tomu druhému stačí dokázat, že $|\mathrm{Out}(D_{16})| > 2$, k čemuž stačí najít aspoň dva "nezávislé" vnější automorfismy (co tou "nezávislostí" přesně myslím?).

Úlohy na procvičování.

Faktorgrupy

1. Nechť $N \trianglelefteq G$ a buď $A, B \subseteq G$ takové, že $N = \langle A \rangle$, $G/N = \langle B/N \rangle$. Dokažte, že $G = \langle A \cup B \rangle$.

2. Dokažte, že $D_{4n}/N \simeq D_{2n}$, kde N je podgrupa generovaná středovou symetrií.

3. Dokažte, že $PSL_2(\mathbb{Z}_3) \simeq A_4$.

Centrum

4. Dokažte, že pokud je $Z(G) = 1$, pak také $Z(\mathrm{Aut}(G)) = 1$.

Automorfismy

5. Dokažte, že $\mathrm{Aut}(G) = 1$ právě tehdy, když $|G| \leq 2$.

6. Spočtěte grupy $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3)$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)$. [Možná je to poněkud pracné, ale aspoň si uvědomte, v čem je problém.]

7. Dokažte, že $\mathrm{Aut}(Q_8) \simeq S_4$.

8. Dokažte, že spojité automorfismy grupy $\mathbb{R}$ jsou právě lineární zobrazení $x \mapsto rx$, $r \in \mathbb{R}^*$.