Domácí úlohy 3.

odevzdat do 13.11. 10:40

1. (8 bodů) Dokažte následující dvě lemmata, která jsou užitečná při analýze izomorfismu semidirektních součinů.

(1) Buď $\varphi, \psi : K \to \mathrm{Aut}(N)$ homomorfismy a buď $\alpha \in \mathrm{Aut}(N)$ takové, že $\varphi_x = \alpha\psi_x\alpha^{-1}$ pro všechna $x \in K$. Pak $N \rtimes_\varphi K \simeq N \rtimes_\psi K$.

(2) Buď $\varphi, \psi : K \to \mathrm{Aut}(N)$ homomorfismy a buď $\beta \in \mathrm{Aut}(K)$ takové, že $\psi = \varphi \circ \beta$. Pak $N \rtimes_\varphi K \simeq N \rtimes_\psi K$.

Návod: Zkuste izormorfismy $(a, x) \mapsto (\alpha^{-1}(a), x)$ a $(a, x) \mapsto (a, \beta^{-1}(x))$.

2. (12 bodů) Nechť $G = N \rtimes K$ je grupa s dvanácti prvky ($|N|, |K| > 1$). Dokažte, že G je buď abelovská (v případě že jde o direktní součin), anebo je izomorfní jedné z grup A_4, D_{12} anebo jisté grupě X. Tuto grupu X explicitně popište (co je N, K, ψ?) a dokažte, že není izomorfní A_4 ani D_{12}.

Návod: Diskutujte všechny možné trojice N, K, ψ takové, že $|N| \cdot |K| = 12$. Využijte vše, co jsme dělali na přednášce/cvičení (nemusíte znovu dokazovat, jen uveďte, že jsme to dělali). Pokud máte pocit, že je těch ψ moc, použijte jedno z těch lemmat výše. Pokud dokazujete izomorfismus, nemusíte explictně hledat to zobrazení, je možné využít větu o semidirektním rozkladu. Pokud to budete dělat chytře, vše se pohodlně vejde na jeden papír.

Poznámka: Časem si dokážeme, že každá dvanáctiprvková neabelovská grupa je (netriviálním) semidirektním součinem, čímž dokončíme klasifikaci dvanáctiprvkových grup.

Úlohy na procvičování.

1. Uvažujte semidirektní součin $\mathbb{Z}_p^2 \rtimes_\psi \mathbb{Z}_p$, kde

$$\psi : \mathbb{Z}_p \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p^2) = GL_2(p), \qquad k \mapsto \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dokažte, že jde o neabelovskou grupu řádu p^3. Spočtěte její centrum.

Poznámka: Možná si pamatujete, že všechny grupy řádu p^2 jsou abelovské. Také si snad pamatujete, že ne všechny grupy řádu p^3 jsou semidirektně rozložitelné, např. Q_8.