

HOMOMORFISMY

Příklad 1. Rozhodněte, zda je zobrazení f homomorfismus. Pokud ano, určete jádro $\text{Ker } f$ a obraz $\text{Im } f$ homomorfismu f , dále defekt $d(f)$ a hodnotu $r(f)$ homomorfismu f . Rozhodněte, zda se jedná o nějaký speciální typ homomorfismu (epi-, mono-, izo-, endo-, automorfismus).

- a) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = (4x + y, 5x + 2y, 2z);$
- b) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = (2x, x + 2z, 2z + 5);$
- c) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; f(x, y, z) = (3x + y, 2z - y);$
- d) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; f(x, y, z) = (x^2 + y, z);$
- e) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; f(x, y, z) = (2 \sin x, \cos y);$
- f) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; f(x, y, z) = (e^x, y);$
- g) $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2; f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2019, 0).$

Příklad 2. Určete jádro $\text{Ker } f$ a obraz $\text{Im } f$ homomorfismu f , dále jeho defekt $d(f)$ a hodnotu $r(f)$. Rozhodněte, zda se jedná o nějaký speciální typ homomorfismu (epi-, mono-, izo-, endo-, automorfismus). Řešte také dále uvedené úkoly.

- a) $f : \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^2; f(x, y, z) = (3x + 2y, 2y + 3z);$
Určete obraz vektoru $(2, 4, 3)$ a úplný vzor vektoru $(4, 3)$.

- b) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = (2x + 2y + 3z, 2y + 3z, 4x + 2y + 4z);$
Určete obraz vektoru $(1, 0, 2)$ a úplný vzor vektoru $(11, 11, 14)$.

Příklad 3. Určete homomorfismus f , který vznikne složením homomorfismů f_1, f_2 .

Určete $\text{Ker } f$, $\text{Im } f$, $r(f)$ a $d(f)$ výsledného homomorfismu f a rozhodněte, zda se jedná o nějaký speciální typ homomorfismu (epi-, mono-, izo-, endo-, automorfismus).

- a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; f_1(x, y) = (x, x + y, x + 2y);$
 $f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4; f_2(x, y, z) = (x + y, y, 2z, z);$
- b) $f_1 : \mathbb{Z}_7^4 \rightarrow \mathbb{Z}_7^4; f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_1, x_2, 3x_3);$
 $f_2 : \mathbb{Z}_7^4 \rightarrow \mathbb{Z}_7^3; f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_4, 3x_1, 4x_2).$

Příklad 4. Najděte předpis pro homomorfismus $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, víte-li, že

$$f(1, 0) = (5, 4), \quad f(0, 1) = (3, 2).$$

Příklad 5. Najděte předpis pro homomorfismus $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, víte-li, že

$$f(1, 0, 1) = (2, 2), \quad f(0, 0, 1) = (0, 1), \quad f(3, 4, 3) = (10, 10).$$

Příklad 6. Najděte předpis pro homomorfismus $f : \mathbb{Z}_7^2 \rightarrow \mathbb{Z}_7^2$, víte-li, že

$$f(5, 3) = f(2, 1) = (3, 5).$$

Příklad 7. Najděte předpis pro homomorfismus $f : \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^3$, víte-li, že

$$f(2, 3, 0) = (4, 1, 2), \quad f(3, 2, 4) = (1, 1, 1), \quad (3, 1, 1) \in \text{Ker } f.$$

VÝSLEDKY:

Příklad 1.

a) Ano, zobrazení f je homomorfismus.

$$\text{Ker } f = [(0, 0, 0)], \quad d(f) = 0,$$

$$\text{Im } f = [(1, 2, 0), (0, -3, 0), (0, 0, 2)] = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)] = \mathbb{R}^3, \\ r(f) = 3.$$

Homomorfismus f je epimorfismus, monomorfismus, izomorfismus, endomorfismus, automorfismus.

b) Ne, zobrazení f není homomorfismus.

c) Ano, zobrazení f je homomorfismus.

$$\text{Ker } f = [(-2, 6, 3)], \quad d(f) = 1$$

$$\text{Im } f = [(1, 0), (0, 1)] = \mathbb{R}^2, \quad r(f) = 2.$$

Homomorfismus f je epimorfismus.

Homomorfismus f není ani monomorfismus, ani izomorfismus, ani endomorfismus, ani automorfismus.

d) Ne, zobrazení f není homomorfismus.

e) Ne, zobrazení f není homomorfismus.

f) Ne, zobrazení f není homomorfismus.

g) Ne, zobrazení f není homomorfismus.

Příklad 2.

a) $\text{Ker } f = [(1, 1, 1)], d(f) = 1,$

$\text{Im } f = [(1, 0), (0, 1)] = \mathbb{Z}_5^2, r(f) = 2.$

Homomorfismus f je epimorfismus.

Homomorfismus f není ani monomorfismus, ani izomorfismus, ani endomorfismus, ani automorfismus.

$f(2, 4, 3) = (4, 2),$

$f^{-1}(4, 3) = (4, 1, 2) + [(1, 1, 1)].$

b) $\text{Ker } f = [(0, 0, 0)], d(f) = 0,$

$\text{Im } f = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)] = \mathbb{R}^3, r(f) = 3.$

Homomorfismus f je epimorfismus, monomorfismus, izomorfismus, endomorfismus, automorfismus.

$f(1, 0, 2) = (8, 6, 12),$

$f^{-1}(11, 11, 14) = (0, 1, 3).$

Příklad 3.

a) $f(x, y) = (2x + y, x + y, 2x + 4y, x + 2y),$

$\text{Ker } f = [(0, 0, 0)], d(f) = 0,$

$\text{Im } f = [(2, 1, 2, 1), (1, 1, 4, 2)], r(f) = 2.$

Homomorfismus f je monomorfismus.

Homomorfismus f není ani epimorfismus, ani izomorfismus, ani endomorfismus, ani automorfismus.

b) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (6x_3, 3x_4, 4x_1).$

$\text{Ker } f = [(0, 1, 0, 0)], d(f) = 1,$

$\text{Im } f = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)] = \mathbb{Z}_7^3, r(f) = 3.$

Homomorfismus f je epimorfismus.

Homomorfismus f není ani monomorfismus, ani izomorfismus, ani endomorfismus, ani automorfismus.

Příklad 4.

$f(x, y) = (5x + 3y, 4x + 2y)$

Příklad 5.

$f(x, y, z) = (2x + y, x + y + z)$

Příklad 6.

$f(x, y) = (6x + 5y, 3x + 6y)$

Příklad 7.

$f(x, y, z) = (3x + y, 2y + 3z, x + 2z)$