

## MATICOVÁ REPREZENTACE HOMOMORFISMŮ

**Příklad 1.** Určete matici homomorfismu  $f$  vzhledem ke kanonickým bázím příslušných vektorových prostorů

a)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ;  $f(x, y, z) = (x + 3z, 2x - y + 5z, z, y + z)$ ,

b)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^6$ ;  $f(x, y) = (y, y, y, y, y, y)$ .

**Příklad 2.** Určete matici homomorfismu  $f$  z příkladu 1a) vzhledem k bázím  $M, N$ , kde  $M = \{(1, 1, 2), (2, 0, -1), (1, 1, 0)\}$  je báze prostoru  $\mathbb{R}^3$  nad  $\mathbb{R}$  a  $N$  je kanonická báze prostoru  $\mathbb{R}^4$  nad  $\mathbb{R}$ .

**Příklad 3.** Určete matici homomorfismu (endomorfismu)  $f$  vzhledem k bázím  $M, N$ , kde

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = (x, y + 3z, 2x - z),$$

$$M = \{(0, 1, 1), (1, 2, 0), (0, 1, -1)\}, N = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 2, 2)\}.$$

**Příklad 4.** Určete matici endomorfismu  $f : \mathbb{Z}_3^4 \rightarrow \mathbb{Z}_3^4$ , vzhledem ke kanonické bázi.  $f(x, y, z, w) = (x + 2w, w, 2y, 0)$ .

**Příklad 5.** Určete matici endomorfismu  $f : \mathbb{Z}_5^2 \rightarrow \mathbb{Z}_5^2$  vzhledem k bázi  $M$ .  $f(x, y) = (4x + 3y, 0)$ ,  $M = \{(4, 4), (3, 4)\}$ .

**Příklad 6.** Určete matici přechodu  $A$  od báze  $M$  ke kanonické bázi prostoru  $\mathbb{R}^3$  nad  $\mathbb{R}$ .  $M = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, -1, 0)\}$ .

Dále určete matici přechodu  $B$  od kanonické báze k bázi  $M$ . Poté ověřte, že matice  $B$  je inverzní k matici  $A$  (tj.  $B = A^{-1}$ , neboli  $AB = BA = E$ ).

**Příklad 7.** Určete matici přechodu  $A$  od báze  $M = \{(2, 1), (-1, 2)\}$  k bázi  $N = \{(1, 1), (0, 2)\}$  vektorového prostoru  $\mathbb{R}^2$  nad  $\mathbb{R}$ .

Dále určete matici přechodu  $B$  od báze  $N$  k bázi  $M$ . Ověřte, že matice  $B$  je inverzní k matici  $A$  (tj.  $B = A^{-1}$ , neboli  $AB = BA = E$ ). Pomocí vypočítaných matic napište vztahy mezi souřadnicemi vektoru  $v = (x, y)$  vzhledem k různým uvažovaným bázím (oběma směry).

**Příklad 8.** Určete matici přechodu  $A$  od báze  $M = \{(4, 1, 1), (1, 4, 1), (1, 1, 4)\}$  k bázi  $N = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$  vektorového prostoru  $\mathbb{Z}_5^3$  nad  $\mathbb{Z}_5$ .

Dále určete matici přechodu  $B$  od báze  $N$  k bázi  $M$ . Ověřte, že matice  $B$  je inverzní k matici  $A$  (tj.  $B = A^{-1}$ , neboli  $AB = BA = E$ ). Pomocí vypočítaných matic napište vztahy mezi souřadnicemi vektoru  $v = (x, y, z)$  vzhledem k různým uvažovaným bázím (oběma směry).

**Příklad 9.** Najděte matici homomorfismu  $f_2 f_1$  vzhledem k bázím  $M, N$ , kde  
 $M = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 2)\}$ ,  $N = \{(1, 1), (1, 0)\}$ ,  
 $f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; f_1(x, y, z) = (x + z, x + y, y + z)$ ,  
 $f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; f_2(x, y, z) = (x + y + z, 2(x + y + z))$ .

VÝSLEDKY:

**Příklad 1.**

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Příklad 2.**

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 11 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Příklad 3.**

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ -6 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

**Příklad 4.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Příklad 5.**

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**Příklad 6.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

**Příklad 7.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$\langle v \rangle_N^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \langle v \rangle_M^T$$

tj.

$$\begin{pmatrix} 2x - y \\ -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\langle v \rangle_M^T = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \langle v \rangle_N^T$$

tj.

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y \\ \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

**Příklad 8.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\langle v \rangle_N^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \langle v \rangle_M^T$$

tj.

$$\begin{pmatrix} 2x + 2y + 4z \\ 2x + 4y + 2z \\ 4x + 2y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\langle v \rangle_M^T = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \langle v \rangle_N^T$$

tj.

$$\begin{pmatrix} 3x + 3y + z \\ 3x + y + 3z \\ x + 3y + 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

**Příklad 9.**

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$