KVADRATICKÉ FORMY

Pozn.: v dalším textu symbolem x, resp. y značíme n-tici $(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$, resp. n-tici $(y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n)$ z příslušného vektorového prostoru (např. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Z}_5^n$, ...)

Příklad 1. Určete, zda jsou následující zobrazení kvadratické formy na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$:

a) $g(x) = x_1 + x_2x_3 - 2x_3^2,\ n = 3,$

b) $g(x) = x_1x_2 + 2x_2x_3,\ n = 4,$

c) $g(x) = x_1^2 - x_3x_5 + 3x_4x_1,\ n = 5,$

d) $g(x) = x_1^3,\ n = 7,$

e) $g(x) = 0,\ n = 7,$

f) $g(x) = x_1^2 - x_2^2 + 2,\ n = 3,$

g) $g(x) = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4),\ n = 4.$

Příklad 2. Najděte analytické vyjádření kvadratické formy g vzhledem ke kanonické bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, jestliže je forma g vytvořena bilineární formou f na prostoru $\mathbb{R}^3$, jejíž analytické vyjádření vzhledem ke kanonické bázi je

a) $f(x,\, y) = x_2y_2 + x_3y_3,$

b) $f(x,\, y) = x_1y_3 + x_2y_3 + x_3y_1,$

c) $f(x,\, y) = 3x_1y_3 - x_2y_3 - 3x_3y_1 + x_3y_2,$

d) $f(x,\, y) = x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_3.$

Příklad 3. Najděte analytické vyjádření (vzhledem ke kanonické bázi) nějaké bilineární formy f na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^5$, kterou je vytvořena kvadratická forma g na prostoru $\mathbb{R}^5$, jejíž analytické vyjádření (vzhledem ke kanonické bázi) je

a) $g(x) = x_1^2 + x_3x_2,$

b) $g(x) = 2x_1x_2 - 5x_1x_3 - 2x_2x_3,$

c) $g(x) = 3x_1x_3 - x_2x_3,$

d) $g(x) = 0.$

Příklad 4. Bilineární forma f na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ má vzhledem ke kanonické bázi analytické vyjádření

$$f(x,\, y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_1y_3 + 2x_2y_1 + 7x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_1 - 3x_3y_3.$$

Najděte analytické vyjádření (vzhledem ke kanonické bázi) a matici kvadratické formy g na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$, která je vytvořena bilineární formou f.

Příklad 5. Bilineární forma f na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ má vzhledem ke kanonické bázi analytické vyjádření

$$f(x,\, y) = -2x_1y_2 + 3x_1y_3 + 2x_2y_1 - x_2y_3 - 3x_3y_1 - x_4y_4.$$

Najděte analytické vyjádření (vzhledem ke kanonické bázi) a matici kvadratické formy g na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$, která je vytvořena bilineární formou f.

Příklad 6. Napište matici kvadratické formy g na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$, je-li její analytické vyjádření vzhledem ke kanonické bázi

$$g(x) = 4x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 7x_2x_3 - x_3^2.$$

Příklad 7. Napište matici kvadratické formy g na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_{11}^5$, je-li její analytické vyjádření vzhledem ke kanonické bázi

$$g(x) = 5x_1x_3 + 10x_1x_5 + 5x_2^2 + 9x_4x_5 + 2x_5^2.$$

Příklad 8. Určete hodnost $r(g)$, defekt $d(g)$ a vrchol $V(g)$ kvadratické formy g na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$, je-li její analytické vyjádření vzhledem ke kanonické bázi

$$g(x) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - x_4^2.$$

Příklad 9. Určete hodnost $r(g)$, defekt $d(g)$ a vrchol $V(g)$ kvadratické formy g na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^4$, je-li její analytické vyjádření vzhledem ke kanonické bázi

$$g(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_4 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 + x_3x_4 + 3x_4^2.$$

Příklad 10. Kvadratická forma g na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ má vzhledem ke kanonické bázi analytické vyjádření

$$g(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2x_3 - 5x_3^2.$$

Najděte její analytické vyjádření vzhledem k bázi

$$M = \{(2,\, 0,\, 1),\ (0,\, 2,\, 1),\ (0,\, 0,\, 4)\}\,.$$

Příklad 11. Kvadratická forma g na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ má vzhledem ke kanonické bázi analytické vyjádření

$$g(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 3x_3^2.$$

Najděte její analytické vyjádření vzhledem k bázi

$$M = \{(2,\, 2,\, 3),\ (2,\, 2,\, 2),\ (4,\, 4,\, 2)\}\,.$$

Příklad 12. Kvadratická forma g na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ má vzhledem k bázi

$$M = \{(1,\, -1,\, 1),\ (1,\, -1,\, 0),\ (1,\, 0,\, 0)\}$$

analytické vyjádření

$$g(x) = 4x_1^2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + 3x_3^2.$$

Najděte její analytické vyjádření vzhledem ke kanonické bázi.

Příklad 13. Kvadratická forma g na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ má vzhledem k bázi

$$M = \{(0,\, 2,\, 0),\ (3,\, 0,\, 2),\ (4,\, 1,\, 2)\}$$

analytické vyjádření

$$g(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2.$$

Najděte její analytické vyjádření vzhledem ke kanonické bázi.

Příklad 14. Kvadratická forma g na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$ má vzhledem ke kanonické bázi analytické vyjádření

$$g(x) = 16x_1^2 + 5x_2^2.$$

Najděte některou bázi P prostoru $\mathbb{R}^2$ polární vůči g a dále analytické vyjádření formy g vzhledem k této bázi. Najděte nějakou bázi N prostoru $\mathbb{R}^2$ normální vůči g a normální tvar formy g. Určete vrchol formy (souřadnice vektorů, které generují $V(g)$, zapiště vzhledem ke kanonické bázi), signaturu formy a typ formy.

Příklad 15. Kvadratická forma g na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ má vzhledem ke kanonické bázi analytické vyjádření

$$g(x) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

Najděte některou bázi P prostoru $\mathbb{R}^3$ polární vůči g a dále analytické vyjádření formy g vzhledem k této bázi. Najděte nějakou bázi N prostoru $\mathbb{R}^3$ normální vůči g a normální tvar formy g. Určete vrchol formy (souřadnice vektorů, které generují $V(g)$, zapiště vzhledem ke kanonické bázi), signaturu formy a typ formy.

VÝSLEDKY:

Příklad 1. a) ne, b) ano, c) ano, d) ne, e) ano, f) ne, g) ne

Příklad 2. a) $g(x) = x_2^2 + x_3^2$,

b) $g(x) = 2x_1x_3 + x_2x_3$,

c) $g(x) = 0$,

d) $g(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$

Příklad 3. a) např. $f(x, y) = x_1y_1 + x_3y_2 - x_4y_5 + x_5y_4$

b) např. $f(x, y) = 2x_1y_2 - 3x_1y_3 - 2x_2y_3 - 2x_3y_1$

c) např. $f(x, y) = 3x_1y_3 - x_2y_3$

d) např. $f(x, y) = 100x_1y_2 - 100x_2y_1$

Příklad 4. $g(x) = 2x_1^2 - x_1x_2 + 7x_2^2 - x_2x_3 - 3x_3^2$

$$\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 7 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -3 \end{pmatrix}$$

Příklad 5. $g(x) = -x_2x_3 - x_4^2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Příklad 6.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & -\frac{7}{2} \\ 1 & -\frac{7}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Příklad 7.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 5 & 0 & 0 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

Příklad 8. $r(g) = 4, \quad d(g) = 0, \quad V(g) = O$

Příklad 9. $r(g) = 4, \quad d(g) = 0, \quad V(g) = O$

Příklad 10. $g(x) = x_1'^2 - 12x_1'x_2' - 32x_1'x_3' - x_2'^2 - 24x_2'x_3' - 80x_3'^2$

Příklad 11. $g(x) = 2x_1'^2 + 2x_1'x_3' + x_2'^2 + 3x_2'x_3' + 4x_3'^2$

Příklad 12. $g(x) = 3x_1'^2 - 4x_1'x_3' - x_2'^2 + 6x_3'^2$

Příklad 13. $g(x) = x_1'^2 + 4x_2'x_3' + 3x_3'^2$

Příklad 14. $P = \{(1,\ 0),\ (0,\ 1)\},\ g(x) = 16x_1^2 + 5x_2^2$

$N = \left\{(\frac{1}{4},\ 0),\ (0,\ \frac{1}{\sqrt{5}})\right\},\ g(x) = x_1'^2 + x_2'^2$

$V(g) = O$, signatura: (2, 0, 0), pozitivně definitní

Příklad 15. $P = \{(1,\ 1,\ 0),\ (-1,\ 1,\ 0),\ (-6,\ -4,\ 2)\},\ g(x) = 2x_1'^2 - 2x_2'^2 - 48x_3'^2$

$N = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 1,\ 0),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,\ 1,\ 0),\ \frac{1}{\sqrt{48}}(-6,\ -4,\ 2)\right\},\ g(x) = x_1''^2 - x_2''^2 - x_3''^2$

$V(g) = O$, signatura: (1, 2, 0), indefinitní