SKALÁRNÍ SOUČIN

Pozn.: v dalším textu symbolem x, resp. y značíme n-tici $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, resp. n-tici $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

Příklad 1. Určete, zda jsou následující zobrazení skalárními součiny na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$:

a) $f(x, y) = x_1y_1 + 3x_2 - 2x_3y_2 + 5,\ n = 4$

b) $f(x, y) = 4x_1y_1 + 3x_2^7 + 4x_7y_1,\ n = 8$

c) $f(x, y) = x_1y_1 + 3x_2y_3 + 4x_3y_2,\ n = 3$

d) $f(x, y) = -5x_1y_1 - 30x_1y_3 - 30x_3y_1,\ n = 3$

e) $f(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4,\ n = 4$

f) $f(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3,\ n = 4$

g) $f(x, y) = x_1y_1 - 4x_1y_3 + 2x_2y_2 - 4x_3y_1,\ n = 3$

Příklad 2. Bilineární forma f na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ má vzhledem ke kanonické bázi analytické vyjádření

$$f(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 4x_2y_3 + 4x_3y_2 + 9x_3y_3$$

Určete, zda f je skalární součin. V kladném případě řešte další úkoly:

a) najděte nějakou ortogonální a ortonormální bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$

b) zjistěte normu vektoru $v = (2, 0, 1)$

c) zjistěte, zda je vektor $w = (-\sqrt{18}, 1, 1)$ jednotkový

d) zjistěte, zda jsou vektory $(1, 0, -3)$ a $(3, -2, 1)$ navzájem kolmé

e) zjistěte, zda množina $\{(1, 0, -3),\ (3, -2, 1),\ (1, 0, 0)\}$ je ortogonální podmnožinou vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$

f) určete ortogonální doplněk prostoru $W_1 = [(1, 1, 2)]$ v prostoru $\mathbb{R}^3$

g) určete ortogonální doplněk prostoru $W_2 = [(0, 2, 1),\ (1, 0, 1)]$ v prostoru $\mathbb{R}^3$

Příklad 3. Bilineární forma f na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ má vzhledem ke kanonické bázi analytické vyjádření

$$f(x,\, y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 5x_3y_3$$

Určete, zda f je skalární součin. V kladném případě řešte další úkoly:

a) najděte nějakou ortogonální a ortonormální bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$

b) zjistěte, zda je vektor $w = (2,\, 1,\, 1)$ jednotkový

c) zjistěte, zda jsou vektory $(1,\, 0,\, 1)$ a $(1,\, 1,\, -1)$ navzájem kolmé

d) zjistěte, zda množina $\{(1,\, 0,\, 1),\ (1,\, 1,\, -1),\ (1,\, 0,\, 0)\}$ je ortogonální podmnožinou vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$

e) určete ortogonální doplněk prostoru $W_1 = [(0,\, 1,\, 0)]$ v prostoru $\mathbb{R}^3$

f) určete ortogonální doplněk prostoru $W_2 = [(1,\, 1,\, 0),\ (0,\, 0,\, 3)]$ v prostoru $\mathbb{R}^3$

g) určete úhel, který svírají vektory $v = (2,\, 1,\, 0)$ a $u = (0,\, 1,\, 0)$

h) určete parametr $p \in \mathbb{R}$ tak, aby vektory $(2,\, p,\, -1)$ a $(-1,\, p,\, p-2)$ byly navzájem kolmé

Příklad 4. Bilineární forma f na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ má vzhledem ke kanonické bázi analytické vyjádření

$$f(x,\, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + 6x_3y_3 + 4x_4y_4$$

Určete, zda f je skalární součin. V kladném případě řešte další úkoly:

a) najděte nějakou ortogonální a ortonormální bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$

b) zjistěte normu vektoru $w = (0,\, 1,\, 0,\, 0)$

c) zjistěte, zda jsou vektory $(1,\, 0,\, 3,\, 2)$ a $(-1,\, 1,\, -2,\, 2)$ navzájem kolmé

d) určete ortogonální doplněk prostoru $W_1 = [(2,\, 1,\, 0,\, 1),\ (0,\, -1,\, 0,\, 4)]$ v prostoru $\mathbb{R}^4$

e) určete ortogonální doplněk prostoru $W_2 = [(1,\, 1,\, 1,\, 1)]$ v prostoru $\mathbb{R}^4$

VÝSLEDKY:

Příklad 1. a) ne, b) ne, c) ne, d) ne, e) ano, f) ne, g) ne

Příklad 2. f je skalární součin

a) $OG = \{(1, 0, 0),\ (0, 1, 0),\ (0, -2, 1)\}$,

$ON = \left\{(1, 0, 0),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0),\ (0, -2, 1)\right\}$

b) $\|v\| = \sqrt{13}$

c) w není jednotkový

d) jsou navzájem kolmé

e) není

f) $W_1^{\perp} = [(-10, 1, 0),\ (-22, 0, 1)]$

g) $W_2^{\perp} = [(-4, -17, 8)]$

Příklad 3. f je skalární součin

a) $OG = \{(1, 0, 0),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, 1)\}$,

$ON = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0),\ (0, 1, 0),\ \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 0, 1)\right\}$

b) w není jednotkový

c) nejsou navzájem kolmé

d) není

e) $W_1^{\perp} = [(1, 0, 0),\ (0, 0, 1)]$

f) $W_2^{\perp} = [(-1, 2, 0)]$

g) $\alpha = 70°32'$

h) $p = 2 \vee p = 3$

Příklad 4. f je skalární součin

a) $OG = \{(1,\, 0,\, 0,\, 0),\ (0,\, 1,\, 0,\, 0),\ (0,\, -2,\, 1,\, 0),\ (0,\, 0,\, 0,\, 1)\}$,

$ON = \left\{(1,\, 0,\, 0,\, 0),\ (0,\, 1,\, 0,\, 0),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(0,\, -2,\, 1,\, 0),\ \frac{1}{2}(0,\, 0,\, 0,\, 1)\right\}$

b) $\|w\| = 1$

c) nejsou navzájem kolmé

d) $W_1^{\perp} = [(0,\, -2,\, 1,\, 0),\ (-10,\, 16,\, 0,\, 1)]$

e) $W_2^{\perp} = [(-3,\, 1,\, 0,\, 0),\ (-8,\, 0,\, 1,\, 0),\ (-4,\, 0,\, 0,\, 1)]$