

## DETERMINANTY (2. část)

**Příklad 1.** Vypočítejte následující determinant nad komutativním okruhem  $\mathbb{Z}_4$ :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

**Příklad 2.** Vypočítejte následující determinanty. Determinant  $\det A$  je determinan-tem nad polem reálných čísel  $\mathbb{R}$ , determinant  $\det B$  je determinan-tem nad komuta-tivním okruhem  $\mathbb{Z}_6$ :

$$\det A = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 1 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \det B = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

**Příklad 3.** Jsou dány matice  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a  $D$ :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte (bez výpočtu inverzní matice), zda je invertibilní

- matice  $A$  nad polem komplexních čísel  $\mathbb{C}$
- matice  $A$  nad polem reálných čísel  $\mathbb{R}$
- matice  $A$  nad polem  $\mathbb{Z}_{31}$
- matice  $A$  nad oborem integrity celých čísel  $\mathbb{Z}$
- matice  $A$  nad komutativním okruhem  $\mathbb{Z}_6$
- matice  $B$  nad polem komplexních čísel  $\mathbb{C}$
- matice  $B$  nad oborem integrity celých čísel  $\mathbb{Z}$

- h) matice  $B$  nad komutativním okruhem  $\mathbb{Z}_4$
- i) matice  $B$  nad oborem integrity Gaussových celých čísel
- j) matice  $C$  nad polem reálných čísel  $\mathbb{R}$
- k) matice  $C$  nad polem  $\mathbb{Z}_5$
- l) matice  $C$  nad komutativním okruhem  $\mathbb{Z}_6$
- m) matice  $C$  nad oborem integrity celých čísel  $\mathbb{Z}$
- n) matice  $D$  nad polem reálných čísel  $\mathbb{R}$
- o) matice  $D$  nad polem  $\mathbb{Z}_5$
- p) matice  $D$  nad komutativním okruhem  $\mathbb{Z}_{1024}$

**Příklad 4.** Pomocí determinantů vypočítejte inverzní matici k následujícím maticím - matice  $A$ ,  $B$  jsou maticemi nad polem reálných čísel, matice  $C$  je maticí nad oborem integrity celých čísel  $\mathbb{Z}$  a matice  $D$  je maticí nad polem  $\mathbb{Z}_5$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Příklad 5.** Pomocí determinantů vypočítejte inverzní matici  $A^{-1}$  k matici  $A$  nad polem reálných čísel  $\mathbb{R}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Příklad 6.** Pomocí Cramerova pravidla vypočítejte následující soustavu lineárních rovnic nad polem  $\mathbb{Z}_5$ :

$$\begin{aligned} 4x & & + z & = 2, \\ 4x + y & & & = 1, \\ x & & + 2z & = 0. \end{aligned}$$

**Příklad 7.** Pomocí Cramerova pravidla vypočítejte následující soustavu lineárních rovnic nad polem reálných čísel  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z & = 3, \\ 2x + 5y + 3z & = 1, \\ 3x + 4y + 2z & = -6. \end{aligned}$$

**Příklad 8.** Pomocí Cramerova pravidla vypočítejte následující soustavu lineárních

rovnice nad polem  $\mathbb{Z}_{11}$ :

$$\begin{aligned}3a + b + 6c + 4d &= 4, \\9a + 3b + 7c + d &= 7, \\5a + 3b + 2c + 2d &= 0, \\2a + 9b + 8c + 6d &= 1.\end{aligned}$$

**Příklad 9.** Vypočítejte následující determinanty nad polem reálných čísel  $\mathbb{R}$ :

$$\text{a) } \begin{vmatrix} \log_6 3 & \log_5 25 \\ \log_6 12^{-1} & \log_4 16 \end{vmatrix}, \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 3^3 & 3^3 & 9 \\ 3^{-2} & 3^{-2} & 3^{-5} \\ 27 & 3^0 & 3^{-1} \end{vmatrix}.$$

**Příklad 10.** Vypočítejte následující determinanty nad polem komplexních čísel  $\mathbb{C}$ :

$$\text{a) } \begin{vmatrix} -i & i \\ i & i \end{vmatrix}, \quad \text{b) } \begin{vmatrix} i & -i & 1-i & -2-i \\ i & 0 & 2i & i \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & i & i & 3+i \end{vmatrix}.$$

VÝSLEDKY:

**Příklad 1.** 1

**Příklad 2.** a)  $-154$ , b) 0

**Příklad 3.** a) ano, b) ano, c) ano, d) ne, e) ne, f) ano, g) ne, h) ano, i) ne, j) ano, k) ano, l) ano, m) ano, n) ne, o) ne, p) ne

**Příklad 4.**

$$\begin{aligned}A^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}, & B^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{50} & \frac{8}{50} \\ \frac{7}{50} & \frac{1}{25} \end{pmatrix}, \\C^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, & D^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

**Příklad 5.**

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

**Příklad 6.** (2, 3, 4)

**Příklad 7.** (4,  $-20$ , 31)

**Příklad 8.** Příklad nelze řešit pomocí Cramerova pravidla, neboť matice soustavy je singulární.

**Příklad 9.** a) 4, b)  $-\frac{208}{9}$

**Příklad 10.** a) 2, b)  $9 + 7i$