DETERMINANTY (1. část)

Příklad 1. Vypočítejte následující determinanty nad polem reálných čísel:

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 2 \end{vmatrix}, \qquad \text{b)}\ \begin{vmatrix} -8 \end{vmatrix}, \qquad \text{c)}\ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, \qquad \text{d)}\ \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix},$$

$$\text{e)}\ \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}, \qquad \text{f)}\ \begin{vmatrix} v & o & s \\ p & l & b \\ s & e & k \end{vmatrix}.$$

Příklad 2. Určete znaménka následujících členů determinantu n-tého řádu:

a) $a_{42}a_{13}a_{31}a_{25}a_{54};\ n = 5$
b) $a_{56}a_{34}a_{42}a_{13}a_{61}a_{25}a_{77};\ n = 7$
c) $a_{14}a_{31}a_{24}a_{42};\ n = 4$
d) $a_{2i}a_{k2}a_{3k}a_{m1}a_{i3};\ n = 5$
e) $a_{11}a_{42}a_{33}a_{64}a_{55}a_{86}a_{77}\dots a_{95,95}a_{98,96}a_{97,97}a_{2,98};\ n = 98$
f) $a_{11}a_{n2}a_{23}a_{34}a_{45}a_{56}\dots a_{n-1,n};\ n \geq 3$

Příklad 3. Podle definice vypočítejte následující determinant nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Příklad 4. Podle věty o rozvoji determinantu vypočítejte následující determinanty nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$:

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}, \qquad \text{b)}\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Příklad 5. Vypočítejte následující determinanty nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} \cos x & 0 & \sin x \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin x & 0 & \cos x \end{vmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 5 & 88 & 0 & -9 \\ 0 & -1 & 44 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix},$$

$$\text{c)} \begin{vmatrix} a & 5 & 1 & 2 & 5 & 5 & 1 \\ 0 & l & 2 & -3 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & g & -3 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & e & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}, \qquad \text{d)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt[5]{8} & g & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ -9 & y & \frac{4}{3} & \sqrt{x} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b & 1 & 0 \\ 6,1 & b & 2 & 6^5 & b & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Příklad 6. Vypočítejte následující determinanty nad polem $\mathbb{Z}_5$:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \qquad \text{c)} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Příklad 7. Vypočítejte následující determinanty nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$ (v případech c), d) a e) řešte příklad takovým způsobem, abyste v průběhu výpočtu číselně určovali jediný determinant):

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 150 & 25 & 125 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 150 & 25 & 125 \end{vmatrix},$$

$$\text{c)} \begin{vmatrix} 2 & -2 & 5 \\ -1 & 5 & 10 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 5 & -10 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix},$$

$$\text{d)} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 100 & -77 & 16 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -84 & 77 & 32 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix},$$

$$\text{e)}\ \begin{vmatrix} 13 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 13 & 2 & 2 \\ 1 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 13 & 5 & 3 \\ 1 & -4 & -7 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Příklad 8. Vypočítejte následující determinant nad polem $\mathbb{Z}_3$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Příklad 9. Vypočítejte následující determinant nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & c & 0 & 0 & 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & 0 & r & a & 0 & s & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & m & 0 & j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & q & r & 0 & b & 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & n & o & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & 0 & b & o & n & z & 0 & 0 & t \end{vmatrix}$$

Příklad 10. Vypočítejte následující determinant nad polem $\mathbb{Z}_7$:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Příklad 11. Vypočítejte následující determinant nad polem $\mathbb{Z}_{17}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$

Příklad 12. Vypočítejte následující determinant nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$:

$$\begin{vmatrix} 0 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} & 2 \\ -\mathrm{i} & 1 & 2 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 1 & 1 \\ \mathrm{i} & 2 & 1 & \mathrm{i}+1 \end{vmatrix}$$

Příklad 13. Vypočítejte následující determinant nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$:

$$\begin{vmatrix} 8 & 16 & 24 & 0 & 32 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 6\mathrm{i} & 6\mathrm{i} & 3\mathrm{i} & 9\mathrm{i} & 3\mathrm{i} & -6\mathrm{i} \\ 10 & 10 & -20 & 0 & 10 & 0 \end{vmatrix}$$

VÝSLEDKY:

Příklad 1. a) 2, b) -8, c) 13, d) -23, e) -5, f) $vlk + sob + pes - sls - bev - kop$
Příklad 2. a) $-$, b) $-$, c) součin není členem determinantu, d) $-$ e) $+$, f) $+$ pro n sudé, $-$ pro n liché
Příklad 3. 2
Příklad 4. a) -6, b) -10
Příklad 5. a) $\cos 2x$, b) 100, c) $algebra$, d) 1 pro $x \geq 0$; neexistuje pro $x < 0$
Příklad 6. a) 0, b) 0, c) 1
Příklad 7. a) 175, b) -175, c) 20, d) 176, e) 40
Příklad 8. 2
Příklad 9. *determinant*
Příklad 10. 5
Příklad 11. 0
Příklad 12. $2 - 16\mathrm{i}$
Příklad 13. $-4140\mathrm{i}$