PODOBNOST, JORDANŮV KANONICKÝ TVAR (úvod)

Příklad 1. Napište Jordanův kanonický tvar J matice A nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$, víte-li, že matice A je

- řádu 3
- má právě jedno vlastní číslo 2
- násobnost vlastního čísla 2 je tři
- k vlastnímu číslu 2 přísluší dva lineárně nezávislé vlastní vektory

Příklad 2. Napište Jordanův kanonický tvar J matice B nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$, víte-li, že matice B je

- řádu 4
- má právě dvě vlastní čísla, a to 3 a 5
- násobnost vlastního čísla 3 i vlastního čísla 5 je dva
- k vlastnímu číslu 3 přísluší jeden lineárně nezávislý vlastní vektor, k vlastnímu číslu 5 přísluší dva lineárně nezávislé vlastní vektory

Příklad 3. Napište Jordanův kanonický tvar J matice C nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$, víte-li, že matice B je

- řádu 6
- má právě tři vlastní čísla, a to -3, 4, i
- násobnost vlastního čísla -3 je tři, násobnost vlastního čísla 4 je dva
- k vlastnímu číslu -3 přísluší tři lineárně nezávislé vlastní vektory
- Jordanův kanonický tvar J matice C není diagonální matice

Příklad 4. Napište Jordanův kanonický tvar J matice D nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$, víte-li, že matice D je

- řádu 7
- má právě tři vlastní čísla, a to -3, 4, 1
- násobnost vlastního čísla -3 je dva, násobnost vlastního čísla 4 je dva
- k vlastnímu číslu -3 přísluší jeden lineárně nezávislý vlastní vektor, k vlastnímu číslu 4 přísluší dva lineárně nezávislé vlastní vektory, k vlastnímu číslu 1 přísluší jeden lineárně nezávislý vlastní vektor

Příklad 5. Charakteristický polynom matice A řádu 5 je $(\lambda - 5)^2(\lambda + 8)^3$. Existuje Jordanův kanonický tvar matice A, je-li tato matice maticí

a) nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$,
b) nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$,
c) nad polem racionálních čísel $\mathbb{Q}$?

Příklad 6. Charakteristický polynom matice A řádu 3 je $\lambda(\lambda^2+4)$. Existuje Jordanův kanonický tvar matice A, je-li tato matice maticí

a) nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$,
b) nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$,
c) nad polem racionálních čísel $\mathbb{Q}$?

Příklad 7. Charakteristický polynom matice A řádu 4 je $(\lambda - 1)^2(\lambda^2 - 2)$. Existuje Jordanův kanonický tvar matice A, je-li tato matice maticí

a) nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$,
b) nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$,
c) nad polem racionálních čísel $\mathbb{Q}$?

Příklad 8. Charakteristický i minimální polynom matice A nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$ řádu 3 je $(\lambda - 2)^2(\lambda + 1)$. Je matice A diagonalizovatelná?

Příklad 9. Charakteristický polynom matice A nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$ řádu 3 je $(\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - 7)$. Je matice A diagonalizovatelná?

Příklad 10. Charakteristický polynom matice A nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$ řádu 5 je $(\lambda - 2)^3(\lambda - 8)^2$, minimální polynom této matice je $(\lambda - 2)^2(\lambda - 8)$. Je matice A diagonalizovatelná?

Příklad 11. Matice A nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$ je řádu 5. Je tato matice diagonalizovatelná, jestliže jí (ke všem vlastním číslům dohromady) přísluší

a) 5 lineárně nezávislých vlastních vektorů,
b) 4 lineárně nezávislé vlastní vektory?

VÝSLEDKY:

Příklad 1.

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Příklad 2.

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Příklad 3.

$$J = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

Příklad 4.

• buď je násobnost vlastního čísla 1 tři a Jordanův kanonický tvar

$$J = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

• nebo je násobnost vlastního čísla 1 jedna (zbývající dva **kořeny** charakteristického polynomu (**nikoliv vlastní čísla matice!!!**) jsou komplexně sdružená čísla), ale poté Jordanův kanonický tvar J matice D nad polem reálných čísel $\mathbb{R}$ neexistuje

Příklad 5. a) ano, b) ano, c) ano

Příklad 6. a) ano, b) ne, c) ne

Příklad 7. a) ano, b) ano, c) ne

Příklad 8. ne

Příklad 9. ano

Příklad 10. ne

Příklad 11. a) ano, b) ne